Über Gruppen, deren irreduzible Charaktere sämtlich quasiprimitiv sind

R. Bartsch; G. Pazderski
Rostock

In seinem Buch [7] erwähnt Isaacs den Begriff der Quasiprimitivität eines irreduziblen Charakters einer Gruppe: ein Charakter der Gruppe G heißt *quasiprimitiv* genau dann, wenn er über jedem Normalteiler $N \trianglelefteq G$ homogen, d.h. in ein Vielfaches eines einzigen irreduziblen Charakters von N, zerfällt. Dort findet sich auch die Aussage, daß genau dann alle irreduziblen Charaktere einer *auflösbaren* Gruppe quasiprimitiv sind, wenn die Gruppe abelsch ist (Problem 6.6). In der vorliegenden Arbeit werden die endlichen Gruppen, deren irreduzible Charaktere sämtlich quasiprimitiv sind, vollständig charakterisiert (Satz 9). Dazu benötigen wir im wesentlichen die Cliffordschen Sätze, den Reziprozitätssatz von Frobenius, das Brauersche Permutationslemma (siehe etwa [7]), sowie einen Satz von Feit und Seitz über einfache Gruppen, welcher besagt, daß alle Automorphismen einer einfachen Gruppe, die deren Konjugiertheitsklassen fixieren, innere Automorphismen sind. Er wird in [4] als Theorem C unter Verwendung des Klassifikationstheorems der einfachen Gruppen bewiesen.
Des weiteren werden Gruppen betrachtet, deren sämtliche irreduzible Charaktere einer abgeschwächten Quasiprimitivitätsbedingung genügen: Eine Gruppe G heißt *charakteristisch-quasiprimitiv* genau dann, wenn jeder irreduzible Charakter von G über jeder charakteristischen Untergruppe von G homogen zerfällt. In diesem Zusammenhang befassen wir uns hier vornehmlich mit auflösbaren Gruppen. Es wird gezeigt, daß eine auflösbare charakteristisch-quasiprimitive Gruppe nilpotent höchstens von der Klasse 2 und die Kommutatorgruppe einer charakteristisch-quasiprimitiven p–Gruppe elementarabelsch ist. Die charakteristisch-quasiprimitiven p–Gruppen mit zyklischer Kommutatorgruppe werden vollständig bestimmt.
Alle betrachteten Gruppen sind endlich. Die verwendeten Bezeichnungen sind Standard; man findet sie z.B. in [5] erklärt.

I. Quasiprimitive Gruppen

Satz 1. *Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Genau dann zerfallen über N alle irreduziblen Charaktere von G homogen, wenn je zwei Elemente von N, die unter G konjugiert sind, bereits in N konjugiert sind.*

Beweis: Sei $\chi \in Irr(G)$. Nach dem Cliffordschen Satz zerfällt χ über N in die sämtlichen G–Konjugierten eines Charakters $\vartheta \in Irr(N)$. Andrerseits existiert, wie man mit der Frobeniusschen Reziprozitätsbeziehung schließen kann, zu jedem

$\vartheta \in Irr(N)$ ein Charakter $\chi \in Irr(G)$, bei dessen Einschränkung auf N gerade ϑ als Summand auftritt. Folglich sind genau dann alle irreduziblen Charaktere von G quasiprimitiv, wenn jeder irreduzible Charakter jedes Normalteilers von G unter G nur zu sich selbst konjugiert ist.
Offenkundig wirkt G durch Konjugation permutierend sowohl auf den irreduziblen Charakteren von N, als auch auf den Konjugiertenklassen von N. Gemäß Definition konjugierter Charaktere ist dabei $\chi^g(n) := \chi(n^{g^{-1}})$, also

$$\forall g \in G, n \in N : \chi^g(n^g) = \chi(n) \tag{1}$$

Nach dem Brauerschen Satz über Gruppen, die sowohl die irreduziblen Charaktere, als auch die Konjugiertenklassen einer weiteren Gruppe (in unserm Fall N) permutieren, und dabei der Bedingung (1) genügen, ist die Anzahl der dabei fixierten irreduziblen Charaktere gleich der Anzahl der fixierten Konjugiertenklassen (siehe [7]). Da überdies stets $|Irr(N)|$ gleich der Anzahl der Konjugiertenklassen von N ist, folgt daraus, daß genau dann alle $\vartheta \in Irr(N)$ unter G fest bleiben, wenn alle Konjugiertenklassen von N unter G fest bleiben.
Insgesamt folgt, daß genau dann alle $\chi \in Irr(G)$ über N homogen zerfallen, wenn alle Elemente von N, die unter G konjugiert sind, bereits unter N konjugiert sind.
□

Wenn je zwei Elemente eines Normalteilers N von G, die unter G konjugiert sind, bereits unter N konjugiert sind, so wollen wir N *konjugationsautonom*[1] *in* G nennen. Wir erhalten somit

Satz 2. *Eine Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn in ihr alle Normalteiler konjugationsautonom sind.*

Korollar 3. *Sei G eine quasiprimitive Gruppe. Dann gilt:*

(a) Die Normalteilerrelation ist in G transitiv, d.h. aus $N \trianglelefteq M$ und $M \trianglelefteq G$ folgt stets $N \trianglelefteq G$.

(b) Jeder Normalteiler von G ist quasiprimitiv.

(c) Jede Faktorgruppe von G ist quasiprimitiv.

Lemma 4. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv und auflösbar, wenn sie abelsch ist.*

Beweis: Eine abelsche Gruppe ist in trivialer Weise auflösbar und quasiprimitiv; wir müssen also nur zeigen, daß jede quasiprimitive und auflösbare Gruppe abelsch ist. Angenommen, G sei ein minimales Gegenbeispiel.
Dann ist G jedenfalls nicht einfach, und wir können einen maximalen echten Normalteiler $N \triangleleft G$ auswählen. Gemäß Korollar 3 ist N quasiprimitiv und natürlich

[1]**Sah** verwendet in [12] das englische Wort „*c-closed*“ für denselben Sachverhalt.

auflösbar. Daher ist N wegen der Minimalität von G abelsch. Weil gemäß Satz 2 ganz G auf N keine anderen Konjugationen bewirkt als N selbst, gilt also $N \trianglelefteq Z(G)$.
Überdies ist G/N natürlich auflösbar, wegen der Maximalität von N einfach, also zyklisch von Primzahlordnung. Mit $N \trianglelefteq Z(G)$ folgt daraus aber, daß G im Widerspruch zur Annahme abelsch ist. □
Aus Satz 2, Korollar 3 und Lemma 4 ergibt sich

Korollar 5. *Ist G eine quasiprimitive Gruppe, so liegt jeder auflösbare Subnormalteiler von G in $Z(G)$, und $G/Z(G)$ enthält keinen auflösbaren echten Subnormalteiler.*

Lemma 6. *Ist eine Gruppe G quasiprimitiv, so ist $G/Z(G)$ trivial oder vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren.*

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel. Dann ist $G > Z(G)$.
1. Fall: $Z(G) \neq 1$. In diesem Fall ist $|G/Z(G)| < |G|$, so daß wegen der Minimalität von G und Korollar 3 die Gruppe $(G/Z(G))/Z(G/Z(G))$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist. Aus Korollar 5 folgt aber $Z(G/Z(G)) = 1$, also

$$(G/Z(G))/Z(G/Z(G)) \cong G/Z(G),$$

so daß damit schon $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren wäre, im Widerspruch zur Wahl von G als Gegenbeispiel.
2. Fall: $Z(G) = 1$. Sei nun N ein minimaler, also ein wegen Korollar 3 einfacher Normalteiler von G. Nach Satz 2 bewirken alle Elemente von G via Konjugation klassenerhaltende Automorphismen auf N, nach Theorem C aus [4] also innere. Offensichtlich sind alle Elemente von G, die auf N lediglich innere Automorphismen hervorrufen, in $NC_G(N)$ enthalten. Das ergibt $G = NC_G(N)$ und natürlich ist $C_G(N) \trianglelefteq G$. Des weiteren gilt $N \cap C_G(N) = Z(N) = 1$ wegen Korollar 5 und $Z(N) \leq Z(G) = 1$. Damit haben wir

$$G = N \times C_G(N). \tag{2}$$

Außerdem ist natürlich $|C_G(N)| < |G|$ und $Z(C_G(N)) = 1$, wiederum wegen Korollar 5 und $Z(G) = 1$. Weil überdies $C_G(N)$ nach Korollar 3 quasiprimitiv ist, folgt aus der Minimalität von G, daß $C_G(N)$ trivial oder vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist. In Hinblick auf (2) ist demnach auch G vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren. □
In [3] bewiesen und auch leicht nachzurechnen ist

Proposition 7. *Ist für eine Gruppe G die Faktorgruppe $G/Z(G)$ trivial oder vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren, so sind G' und $G/Z(G)$ perfekt, und es ist $G = G'Z(G)$.*
Die Eigenschaft, daß die Zentrumsfaktorgruppe trivial oder vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist, überträgt sich von einer Gruppe G auf alle Normalteiler $N \trianglelefteq G$.

Überdies gilt

Lemma 8. *Ist für eine Gruppe G die Faktorgruppe $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren, so ist G ein direktes Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen.*

Beweis: Sei $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren:

$$G/Z(G) = G_1/Z(G) \times \cdots \times G_n/Z(G) \tag{3}$$

Wir haben nur zu zeigen, daß dabei jeder quasieinfache Normalteiler G_i mit jeder anderen Komponente G_j elementweise vertauschbar ist. Da für $n = 1$ nichts zu beweisen ist, sei fortan $n \geq 2$. Wir wählen o.B.d.A. G_1 aus und setzen $\langle G_2, ..., G_n \rangle =: M$. Nach Proposition 7 gilt $M = M'Z(M)$ und $G_1 = G_1'Z(G_1)$, wobei unserer Voraussetzung gemäß sicher $Z(G_1) = Z(M) = Z(G)$ ist, also $M = M'Z(G)$ und $G_1 = G_1'Z(G)$. Daraus folgt

$$[G_1, M] = [G_1'Z(G), M'Z(G)] = [G_1', M'] \ .$$

Nun besagt (3), daß $[G_1', M'] \leq Z(G)$ gilt, woraus wiederum

$$[[G_1', M'], M'] = 1 \tag{4}$$

folgt. Natürlich ist $[G_1', M'] = [M', G_1']$, also nach (4)

$$[[M', G_1'], M'] = [[G_1', M'], M'] = 1,$$

woraus mit dem Drei–Untergruppen–Lemma (Lemma (8.6) aus [1]) nun $[[M', M'], G_1'] = 1$ folgt. Nach Proposition 7 ist aber M' perfekt, also $[M', M'] = M'$, so daß wir $[M, G_1] = [M', G_1'] = 1$ haben. Also ist G_1 elementweise mit M vertauschbar und G ist somit das direkte Produkt mit vereinigten Zentren der quasieinfachen Gruppen G_i. □

Hauptsatz 9. *Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt mit vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen ist.*

Beweis: Sei zunächst G das direkte Produkt mit vereinigten Zentren der quasieinfachen Gruppen $G_1, ..., G_n$. Insbesondere ist dann $G/Z(G)$ vollständig reduzibel. Ist N ein beliebiger Normalteiler von G, so ist entweder $N \leq Z(G)$, $NZ(G) = G$ oder $NZ(G)$ ein echter Normalteiler von G. In den ersten beiden Fällen ist klar, daß G auf N keine anderen Konjugationen bewirkt als N selbst. Ist $NZ(G)$ ein echter Normalteiler von G, so muß $NZ(G)$ in G direkter Faktor bei vereinigten Zentren sein. Mithin ist $NZ(G)$, also auch N konjugationsautonom in G. Da dies für alle Normalteiler von G zutrifft, ist G nach Satz 2 quasiprimitiv.
Sei nun G quasiprimitiv. Laut Lemma 6 ist dann $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren. Lemma 8 sichert dann, daß G direktes Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen ist. □

Korollar 10. *Das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen ist genau dann quasiprimitiv, wenn G_1 und G_2 quasiprimitiv sind.*

II. Charakteristisch-quasiprimitive Gruppen

Für charakteristisch-quasiprimitive Gruppen folgt wiederum aus Satz 1

Satz 11. *Eine Gruppe G ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn alle charakteristischen Untergruppen von G konjugationsautonom in G sind.*

Klar ist analog Korollar 3 auch

Korollar 12. *Ist G eine charakteristisch-quasiprimitive Gruppe und U eine charakteristische Untergruppe von G, so sind U und G/U ebenfalls charakteristisch-quasiprimitiv.*

Jedoch reicht charakteristische im Gegensatz zur normalen Quasiprimitivität nicht aus, um aus der Auflösbarkeit gleich die Kommutativität ableiten zu können, wie das Beispiel der Quaternionengruppe Q lehrt, über deren einziger nichttrivialer charakteristischer Untergruppe $Z(Q) = Q'$ zweifellos jeder irreduzible Charakter von Q homogen zerfällt. Immerhin gilt aber

Lemma 13. *Ist eine Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv und auflösbar, so liegt ihre Kommutatorgruppe im Zentrum.*

Beweis: Die auflösbare Gruppe G sei genau n-stufig metabelsch. Dann ist $G^{(n-1)}$ abelsch, liegt also, wie Satz 11 lehrt, im Zentrum $Z^1(G)$. Nehmen wir an, für ein $k \geq 1$ gelte $G^{(n-k)} \leq Z^k(G)$, wobei $Z^k(G)$ das k-te Glied der aufsteigenden Zentralfolge bezeichnen möge. Da die Faktorgruppe $G/G^{(n-k)}$ nur noch $(n-k)$-stufig metabelsch ist, ist $(G/G^{(n-k)})^{(n-(k+1))} = G^{(n-(k+1))}/G^{(n-k)}$ abelsch. Als charakteristische Untergruppe der laut Korollar 12 charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe $G/G^{(n-k)}$ liegt $G^{(n-(k+1))}/G^{(n-k)}$ daher wegen Satz 11 im Zentrum $Z(G/G^{(n-k)})$, also ist $G^{(n-(k+1))}$ modulo $G^{(n-k)}$ mit allen $g \in G$ elementweise vertauschbar, erst recht daher modulo $Z^k(G)$. Das ergibt aber $G^{(n-(k+1))}Z^k(G)/Z^k(G) \leq Z(G/Z^k(G)) = Z^{k+1}(G)/Z^k(G)$, also $G^{(n-(k+1))} \leq Z^{k+1}(G)$. Folglich können wir aus der anfangs erhaltenen Relation $G^{(n-1)} \leq Z^1(G)$ induktiv auf $G \leq Z^n(G)$ schließen. Das besagt, daß G nilpotent und die Nilpotenzklasse c von G jedenfalls nicht größer als n ist:

$$c \leq n \ . \tag{5}$$

Andrerseits gilt generell in nilpotenten Gruppen (siehe z.B. [8], Kap.9)

$$2^{n-1} \leq c \ . \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt sofort $2^{n-1} \leq n$, was nur für $n \leq 2$ möglich ist. Mit (5) heißt das gerade $c \leq 2$. Also liegt wie behauptet G' in $Z(G)$. □

Aus Lemma 13 schließen wir aufgrund bekannter Sätze über die Regularität von p–Gruppen im Sinne von P.Hall

Korollar 14. *Jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe mit $p \neq 2$ ist regulär.*

Korollar 15. *Ist G eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe, so ist G' elementarabelsch oder trivial. Insbesondere gilt $\Phi(G) \leq Z(G)$.*

Beweis: Nach Lemma 13 ist G' jedenfalls abelsch.
Angenommen, es sei $exp(G') = p^n$ mit $n > 1$.
Wir betrachten die charakteristische Untergruppe $\mho_{n-1}(G) = \langle g^{p^{n-1}} | g \in G \rangle$. Für zwei Elemente u, v von G finden wir unter Beachtung der Nilpotenzklasse von G nach Lemma 13

$$\begin{aligned} [u^{p^{n-1}}, v^{p^{n-1}}] &= [u, v^{p^{n-1}}]^{p^{n-1}} \\ &= [u, v]^{p^{2n-2}} = 1 \end{aligned}$$

weil $2n - 2 \geq n$ für $n > 1$ gilt.
Da alle p^{n-1}-ten Potenzen $\mho_{n-1}(G)$ erzeugen, ist $\mho_{n-1}(G)$ abelsch und liegt wegen Satz 11 in $Z(G)$. Daraus entnehmen wir

$$\begin{aligned} \forall g, h \in G: \quad [g, h]^{p^{n-1}} &= [g^{p^{n-1}}, h] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das bedeutet im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $exp(G') \leq p^{n-1}$ gilt. Daher muß $n = 1$ sein, so daß G' die behauptete Gestalt hat. Wir finden daher weiter

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G: \qquad & [x^p, y] = [x, y]^p = 1 \\ \Longrightarrow \quad & x^p \in Z(G) \\ \Longrightarrow \quad & \mho_1(G) \leq Z(G), \end{aligned}$$

so daß mit Lemma 13 zusammen sogleich $\Phi(G) = \mho_1(G)G' \leq Z(G)$ folgt. □

Korollar 16. *Jeder auflösbare Normalteiler N einer charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe liegt in $Z^2(G)$, und $G/Z^2(G)$ enthält keinen nichttrivialen auflösbaren Normalteiler.*

Beweis: Für charakteristische Untergruppen N ist dies wie bei Korollar 5 leicht einzusehen. Ist M ein nicht notwendig charakteristischer auflösbarer Normalteiler von G, so ist immerhin $\langle M^\alpha | \alpha \in Aut(G) \rangle$ charakteristisch, als Produkt auflösbarer Normalteiler auflösbar und liegt somit in $Z^2(G)$. □
In Analogie zu Lemma 6 finden wir

Lemma 17. *Ist eine Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, so ist $G/Z^2(G)$ trivial oder vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren.*

Korollar 18. *Ist eine Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, so ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ quasiprimitiv.*

Beweis: Setzen wir $\overline{G} := G/Z(G)$, so folgt aus Lemma 17, daß $\overline{G}/Z(\overline{G})$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist. Nach Lemma 8 ist nun $\overline{G}$ direktes Produkt mit vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen, und somit nach Satz 9 quasiprimitiv. □

Ist eine nilpotente Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, sind es auch alle Sylowgruppen von G. Sind umgekehrt alle Sylowgruppen der nilpotenten Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, so ist es auch G selbst. Ist nämlich N eine charakteristische Untergruppe von G, so ist N ebenfalls nilpotent, also das direkte Produkt seiner Sylowgruppen, welche in den Sylowgruppen von G enthalten sind. Jede Sylowgruppe P_1 von N ist in der zugehörigen Sylowgruppe P von G sogar charakteristisch, weil N charakteristisch in G und die Automorphismengruppe von G das direkte Produkt der Automorphismengruppen der Sylowgruppen von G ist. Daher bewirkt P, also auch G keine anderen Konjugationen in P_1 als P_1 selbst. Da N direktes Produkt seiner Sylowgruppen ist, bewirkt folglich G in N keine anderen Konjugationen als N selbst. Das ergibt:

Lemma 19. *Eine auflösbare Gruppe G ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie nilpotent ist, und alle ihre Sylowgruppen charakteristisch-quasiprimitiv sind. Ihre Nilpotenzklasse ist dann höchstens 2.*

Um die charakteristisch-quasiprimitiven p-Gruppen mit zyklischer (also nach Korollar 15 primzyklischer) Kommutatorgruppe zu bestimmen, verwenden wir einen Satz, der für ungerades p auf Liermann ([10]) zurückgeht, von Pazderski in [11] für $p = 2$ vervollständigt wurde, und auch in [13] nachzulesen ist:

Satz 20. *Eine Gruppe G ist genau dann von der Ordnung p^n (p prim), der Kommutatorgruppenordnung p und direkt unzerlegbar, wenn eine der folgenden Aussagen zutrifft:*

I) $p \geq 2$, $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t, c\rangle$ *mit den Relationen*
$a_i^{p^{m_i}} = b_i^{p^{n_i}} = c^{p^d} = 1$; $b_i a_i = a_i b_i c^{p^{d-1}}$ *für* $i = 1, ..., t$, *sonst kommutativ, und den Zahlbedingungen*
$t \geq 1$, $d \geq 1$, $m_i, n_i \geq 1$ *für* $i = 1, ..., t$, $\sum m_i + \sum n_i + d = n$.

II) $p \geq 2$, $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t\rangle$ *mit den Relationen*
$a_i^{p^{m_i}} = b_i^{p^{n_i}} = 1$; $b_i a_i = a_i b_i b_t^{p^{n_t - 1}}$ *für* $i = 1, ..., t$, *sonst kommutativ, und den Zahlbedingungen*
$t \geq 1$, $m_i, n_i \geq 1$ *für* $i = 1, ..., t$, $n_t \geq 2$, $\sum m_i + \sum n_i = n$.

III) $p = 2$, $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t\rangle$ *mit den Relationen*
$a_i^{2^{m_i}} = b_i^{2^{n_i}} = 1$ *für* $i = 1, ..., t-1$, $a_t^2 = b_t^2 = c$, $c^2 = 1$, $b_i a_i = a_i b_i c$ *für* $i = 1, ..., t$, *sonst kommutativ, und den Zahlbedingungen*
$t \geq 1$, $m_i, n_i \geq 1$ *für* $i = 1, ..., t-1$, $m_1 + \cdots + m_{t-1} + n_1 + \cdots + n_{t-1} + 3 = n$.

Für die drei Typen erweist sich eine Kurzbezeichnung als sinnvoll, aus der alle Parameter bequem abgelesen werden können:
Typ **I**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ n_1, & ..., & n_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p$$

Typ **II**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & m_t \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{n_t} \end{pmatrix}_p$$

Typ **III**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2$$

Die unterstrichenen Parameter zeigen jeweils an, welchen Elementes Potenz der Kommutator ist. Bezogen auf diese Schemata als Bezeichnungen für die betrachteten p-Gruppen, gelten (siehe [10], [11], [13]) folgende Isomorphieaussagen:

Satz 21. *Zwei Schemata, die durch Vertauschung der Spalten ohne unterstrichenes Element oder durch Vertauschung der Elemente einer solchen Spalte auseinander hervorgehen, wollen wir nicht unterscheiden. Sie beschreiben isomorphe Gruppen. Außerdem gilt:*

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & , & 1 & & \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & , & 1 & ; & \underline{1} \end{pmatrix}_2 \cong \begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & 1 \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2$$

Mit dieser Ausnahme liefern alle gemäß obiger Vereinbarung unterschiedenen Systeme nichtisomorphe Gruppen.

Proposition 22. *Ist die Gruppe G ein direktes Produkt einer charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe und einer abelschen Gruppe, so ist G charakteristisch-quasiprimitiv.*

Beweis: Sei $G = P \times A$, wobei P charakteristisch-quasiprimitiv und A abelsch ist. Zwei Elemente einer charakteristischen Untergruppe U von P sind genau dann in G konjugiert, wenn sie es in U sind. Eine charakteristische Untergruppe von G hat nun in P zweifellos eine charakteristische Projektion. Da alle Komponenten aus A bei dieser Konstruktion via Konjugation wirkungslos bleiben, wirken überhaupt höchstens die P-Komponenten eines Elementes aus G nichttrivial, dann aber genau auf die P-Spur, so daß sich wiederum in der zugrundegelegten charakteristischen Untergruppe ein Element findet, das gleichartig wie ein beliebig gegebenes Element von G wirkt. □

Satz 23. *Eine p-Gruppe G mit $|G'| = p > 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ*

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p$$

in der Notation nach Satz 20 ist.
Eine 2-Gruppe G mit $|G'| = 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \\ m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2 \textit{ oder vom Typ } \begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_2$$

ist, wobei im letzten Fall bei $d = 1$ entweder für keinen oder für mindestens zwei Indizes i gilt $m_i = 1$.

Beweis: Sei G eine p-Gruppe mit $|G'| = p$.
Wir denken uns G als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen zerlegt. Von diesen ist wegen der Einfachheit von G' genau eine nichtabelsch. Proposition 22 sichert, daß G charakteristisch-quasiprimitiv ist, sofern es dieser nichtabelsche direkte Faktor ist. Für den umgekehrten Fall beweisen wir, daß die direkt unzerlegbaren p–Gruppen der im Satz nicht beschriebenen Typen nicht charakteristisch-quasiprimitiv sind. Dabei wird deutlich werden, daß die Hinzufügung eines abelschen direkten Faktors an der Eigenschaft, nicht charakteristisch-quasiprimitiv zu sein, nichts ändert. Wir wollen daher G für den nichtabelschen direkten Faktor nehmen.
Angenommen, G sei vom Typ I, II oder III gemäß Satz 20, und es sei nicht $m_i = n_i; \forall i = 1, ..., t$. Sei etwa $m_i > n_i$ für ein i, $1 \leq i \leq t$. Außer bei Typ II mit $i = t$ können wir das o.B.d.A. annehmen. Für Typ II wird der Fall $i = t$ gesondert behandelt. Wir werden zeigen, daß dann die Elemente der charakteristischen Untergruppe $\Omega_{n_i}(G)$ bei geordneter Faktordarstellung nur zentrale Potenzen von a_i enthalten. Für $p > 2$ folgt das unmittelbar aus der mit Korollar 14 gesicherten Regularit„t von G. Für $p = 2$ sehen wir es folgendermaßen ein:

Angenommen, es gäbe ein anderes Element in $\Omega_{n_i}(G)$. Da $\Omega_{n_i}(G)$ von den Elementen der Ordnung $\leq 2^{n_i}$ erzeugt wird, gibt es dann auch ein Element $x \in G$ mit $x^{2^{n_i}} = 1$, das eine nichtzentrale a_i–Potenz als Faktor enthält, etwa

$$x = (\prod_{j=1}^{t} a_j^{k_j} b_j^{l_j}) y^v \ ,$$

wobei $2 \not| k_i$ gilt und y bei Typ I das kommutatorerzeugende Element und ansonsten gleich 1 sein soll. Wir berechnen

$$1 = x^{2^{n_i}} = (\prod_{j=1}^{t} a_j^{2^{n_i} k_j} b_j^{2^{n_i} l_j}) y^{2^{n_i} v} c^s \ , \tag{7}$$

wobei $\langle c \rangle$ der Kommutator von G und $s = \sum k_j l_j 2^{n_i - 1}(2^{n_i} - 1)$ ist. Für $2|s$ haben wir $1 = (\prod a_j^{2^{n_i} k_j} b_j^{2^{n_i} l_j}) y^{2^{n_i} v}$, also auch $a_i^{2^{n_i} k_i} = 1$, was wegen $2 \not| k_i$ ein

Widerspruch zur Annahme $m_i > n_i$ wäre. Mit $2 \not| s$ muß $n_i = 1$ sein und 7 liefert jetzt $a_i^{2k_i} = 1$, also $m_i = 1$ im Widerspruch zu $m_i > n_i$.
Für Typ II und $i = t$ finden wir bei gleicher Vorgehensweise für $n_i > m_i$ alsbald $m_i = 1$ und dann $a_t^{2k_t} b_t^{2l_t} = c$, wegen des Typus von G also $b_t^{2l_t} = c$ bei $2 \not| l_t$. Daraus folgt wiederum wegen des Typus von G sogleich $n_t = 2$. Laut Satz 21 ist dann aber G isomorph zu einer Gruppe vom Typ I.

Somit enthält tatsächlich kein Element von $\Omega_{n_i}(G)$ eine nichtzentrale Potenz von a_i. Da b_i mit allen von a_i verschiedenen Erzeugenden ohnedies kommutiert, liegt b_i in $Z(\Omega_{n_i})$, aber sichtlich nicht in $Z(G)$. Das widerspricht der charakteristischen Quasiprimitivität von G. Daher kann $m_i > n_i$ (und analog $n_i > m_i$) nicht auftreten und wir finden stets $m_i = n_i$, $i = 1, ..., t$.
Überdies kann G, außer mit der in Satz 21 angegebenen Isomorphie zu Typ I, nicht vom Typ II sein, wie wir sogleich sehen werden.
Wir zeigen, daß die minimale b_t enthaltende charakteristische Untergruppe $B := \langle b_t \rangle_{Aut(G)}$ keine Elemente enthält, in deren Darstellung als Produkt der Erzeugenden a_i, b_i eine nichtzentrale Potenz von a_t auftritt, so daß b_t in $Z(B)$ liegt, ohne jedoch zentral in G zu liegen, was ein Widerspruch zur Konjugationsautonomie von $Z(B)$ wäre. Ist nämlich $\alpha \in Aut(G)$, so muß $\alpha(b_t)^{p^{m_t-1}} = c^l$ mit $c := b^{p^{m_t-1}}$ und $1 \leq l < p$ sein. Wäre nun $\alpha(b_t) = b_t^j a_t^k$ mit $p \not| k$, so wäre also einerseits $(b_t^j a_t^k)^{p^{m_t-1}} = c^l \in \langle c \rangle$ und andrerseits[2]

$$(b_t^j a_t^k)^{p^{m_t-1}} = b_t^{jp^{m_t-1}} a_t^{kp^{m_t-1}} c^s$$

bei passendem s. Mit $b_t^{p^{m_t-1}} = c$ ergibt das $(b_t^j a_t^k)^{p^{m_t-1}} = c^{s+j} a_t^{kp^{m_t-1}}$. Dieses Element liegt aber wegen $p \not| k$ nicht in $\langle c \rangle$.

Wir wollen nun noch zeigen, daß eine 2-Gruppe des Typs I, in der zwar $m_i = n_i; \forall i$ gilt, aber $m_{i_o} = n_{i_0} = 1$ genau einmal auftritt und $d = 1$ gilt, nicht charakteristisch-quasiprimitiv sein kann.
Dazu sei G eine solche Gruppe, und o.B.d.A. $m_1 = 1$.
Wir betrachten die minimale $a_1 b_1$ enthaltende charakteristische Untergruppe $U := \langle a_1 b_1 \rangle_{Aut(G)}$ von G. Ist $\alpha \in Aut(G)$, so sind auch

$$\alpha(a_1) = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} c^h \quad (8)$$
$$\alpha(b_1) = a_1^{e'_1} b_1^{f'_1} \cdots a_k^{e'_k} b_k^{f'_k} c^{h'} \quad (9)$$

nichtzentrale Elemente der Ordnung 2. Da a_1, b_1 die einzigen Erzeugenden der

[2]Etwaige weitere Faktoren in $\alpha(b_t)$ kommutieren mit a_t und b_t, ändern daher jedenfalls nichts daran, daß am Schluß der Rechnung eine nichttriviale Potenz von a_t auftritt.

Ordnung 2 (in der Darstellung gemäß Satz 20) sind, gilt für $i > 1$

$$\begin{aligned} (a_i^{e_i} b_i^{f_i})^2 &= a_i^{e_i} b_i^{f_i} a_i^{e_i} b_i^{f_i} \\ &= a_i^{2e_i} b_i^{2f_i} c^{e_i f_i}; \qquad \text{mit } c := [a_i, b_i] \\ &\neq 1; \qquad \text{sofern } 2^{m_i - 1} \nmid e_i \text{ oder } 2^{m_i-1} \nmid f_i, \end{aligned}$$

so daß $e_i, f_i \in \{0, 2^{m_i-1}\}$ folgt. Mithin liegen die in (8) auftretenden Potenzen von $a_i, b_i, i > 1$ zentral. Da jedoch $\alpha(a_1), \alpha(b_1)$ nichtzentrale Elemete sind, kann nicht $e_1 = f_1 = 0$ gelten. Ebensowenig ist $e_1 = f_1 = 1$ möglich, da sonst $\alpha(a_1)$ die Ordnung 4 hätte. Folglich gilt $e_1 = 1, f_1 = 0$ oder $e_1 = 0, f_1 = 1$, und dual dazu wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\alpha(a_1)$ und $\alpha(b_1)$ folgt $e_1' = 0, f_1' = 1$ bzw. $e_1' = 1, f_1' = 0$. Jedenfalls haben wir damit $\alpha(a_1 b_1) = a_1 b_1 z$ mit $z \in Z(G)$. Dieses lehrt, daß alle Bilder von $a_1 b_1$ unter G-Automorphismen mit $a_1 b_1$ kommutieren. Daher ist $U = \langle a_1 b_1 \rangle_{Aut(G)}$ abelsch, liegt aber ganz offenbar nicht in $Z(G)$. Somit ist G nicht charakteristisch-quasiprimitiv.

Sei nun umgekehrt G eine p-Gruppe von der im Satz angegebenen Art mit $p \neq 2$, und sei U eine charakteristische Untergruppe von G. Liegt U zentral in G, besteht kein Problem. Gibt es aber ein $x \in U \backslash Z(G)$, so kann x jedenfalls nicht Produkt von p-ten Potenzen der Erzeugenden a_i, b_i sein. Gegebenenfalls durch Umordnung der Erzeugenden finden wir daher

$$x = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} z \ , \ k \geq 1 \tag{10}$$

mit $0 \leq e_i, f_j < p$; $e_i + f_i \geq 1$ und $z \in \mho_1(G) G' \leq Z(G)$.
Sei nun o.B.d.A. $e_1 \neq 0$. Wir betrachten die Abbildung

$$\sigma : \quad \begin{array}{lll} a_1 & \mapsto & a_1^2; \\ b_1 & \mapsto & b_1^{\frac{p+1}{2}}; \end{array} \qquad \left. \begin{array}{lll} a_i & \mapsto & a_i \\ b_i & \mapsto & b_i \end{array} \right\} \text{ für } i \neq 1$$

und finden mit $p \neq 2$: $ord(\sigma(a_1)) = m_1 = ord(\sigma(b_1))$ sowie $[\sigma(a_1), \sigma(b_1)] = [a_1^2, b_1^{\frac{p+1}{2}}] = [a_1, b_1]$, woraus wir entnehmen, daß die Elemente $\sigma(a_i), \sigma(b_i)$ für $i = 1, ..., t$ wiederum alle definierenden Relationen von G gemäß Satz 20 erfüllen, und natürlich erzeugen sie G. Wir schließen, daß σ einen Automorphismus bestimmt. Damit liegt $\sigma(x)$ ebenfalls in U, also haben wir auch

$$\sigma(x) x^{-1} = a_1^{e_1} b_1^{\frac{p-1}{2} f_1} z' \in UZ(G)$$

mit $z' \in Z(G)$. Nun liefert auch die Abbildung τ mit

$$\tau : \quad \begin{array}{lll} a_1 & \mapsto & a_1^{e_1} b_1^{\frac{p-1}{2} f_1}; \\ b_1 & \mapsto & b_1^{e_1^{-1}}; \end{array} \qquad \left. \begin{array}{lll} a_i & \mapsto & a_i \\ b_i & \mapsto & b_i \end{array} \right\} \text{ für } i \neq 1$$

mit $e_1^{-1}e_1 \cong 1\, mod(p)$ einen Automorphismus von G, da $ord(\tau(a_1)) = ord(\tau(b_1)) = p^{m_1}$ wegen $ord(b_1) = ord(a_1)$ und trivialerweise $[\tau(a_1), \tau(b_1)] = c$ gilt. Damit haben wir dann auch $\tau^{-1}(\sigma(x)x^{-1}) = a_1\tau^{-1}(z') \in U$, also auch $a_1 \in UZ(G)$. Weiterhin liefert die Abbildung

$$\begin{array}{lllcllll} a_{i_0} & \mapsto & b_{i_0}^{-1}; & \qquad & a_j & \mapsto & a_j & \rule{0pt}{0pt} \\ b_{i_0} & \mapsto & a_{i_0}; & & b_j & \mapsto & b_j & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{für } j \neq i_0$$

bei Typ I stets einen Automorphismus von G, da wir $m_{i_0} = n_{i_0}$ haben. Folglich liegt auch b_1 in $UZ(G)$. Ganz analog liegen folglich alle in x nichtzentral auftretenden Erzeugenden a_i, b_i und ihre zugehörigen nichtkommutierenden Erzeugenden mit $1 \leq i \leq k$ in $UZ(G)$. Da nur diese via Konjugation nichttrivial auf x wirken, ist folglich jedes G-Konjugierte von x bereits in $UZ(G)$, also auch in U konjugiert zu x. Da dieses für alle charakteristischen Untergruppen U und alle Elemente $x \in U$ gilt, ist G nach Satz 11 charakteristisch-quasiprimitiv.

Sei nun G eine 2-Gruppe vom Typ I oder III, mit $m_i = 1$ für kein oder für mindestens zwei Indizes i. Sei ferner U eine charakteristische Untergruppe von G. Liegt U in $Z(G)$, ist nichts zu zeigen. Ansonsten betrachten wir wiederum $x \in U \backslash Z(G)$ und finden wiederum gegebenenfalls nach Umordnung der Erzeugenden

$$x = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} z \; ; \; k \geq 1 \tag{11}$$

mit $e_i, f_j \in \{0, 1\}$, $e_i + f_i \geq 1; i = 1...k$ und $z \in Z(G)$.
Sei zunächst $m_1 \geq 2$ und dabei o.B.d.A. $e_1 = 1$. Wir betrachten die Abbildung

$$\sigma : \quad \begin{array}{lllcllll} a_1 & \mapsto & a_1 b_1; & \qquad & a_i & \mapsto & a_i \\ b_1 & \mapsto & b_1; & & b_i & \mapsto & b_i \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} a \\ b \end{array}}\right\} \text{für } i \neq 1$$

und erhalten wegen $m_1 \geq 2$

$$\begin{aligned} \sigma(a_1)^{2^{m_1}} &= (a_1 b_1)^{2^{m_1}} = \left((a_1 b_1)^2\right)^{2^{m_1 - 1}} \\ &= (a_1^2 b_1^2 c)^{2^{m_1 - 1}} = a_1^{2^{m_1}} b_1^{2^{m_1}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

wegen $a_1^2, b_1^2 \in Z(G)$ und $c^2 = 1$. Zudem gilt trivialerweise $[a_1 b_1, b_1] = [a_1, b_1]$, so daß die σ-Bilder der Erzeugenden wiederum alle definierenden Relationen gemäß Satz 20 erfüllen. Wir schließen, daß σ einen Automorphismus von G bestimmt. Mithin gilt $\sigma(x), \sigma^{-1}(x) \in UZ(G)$, da $UZ(G)$ charakteristisch in G ist.
Haben wir in (11) $f_1 = 0$, so finden wir $\sigma(x)x = b_1 z'$ mit $z' \in Z(G)$; und für $f_1 = 1$ sehen wir $x\sigma^{-1}(x) = b_1 z''$ mit $z'' \in Z(G)$, also in jedem Falle $b_1 \in UZ(G)$, woraus ganz wie im Falle $p > 2$ leicht $a_1 \in UZ(G)$ folgt. Dementsprechend liegen alle a_i, b_i mit $1 \leq i \leq k$ und $m_i \geq 2$ in $UZ(G)$.

Ist aber $m_1 = 1$, gehen wir wie folgt vor:
Wir definieren die Abbildungen

$$\alpha_i : \begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & b_i \;; \\ b_i & \mapsto & a_i \;; \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_j \\ b_j & \mapsto & b_j \end{array}\right\} \text{ für } j \neq i$$

und für $i \neq j$, $i \neq s \neq j$ mit $m_i = m_j = 1$

$$\beta_{ij} : \begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & a_i a_j \;; \\ b_i & \mapsto & b_j \;; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_i \;; \\ b_j & \mapsto & b_i b_j \;; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_s & \mapsto & a_s \\ b_s & \mapsto & b_s \end{array}$$

die, wie wir auch hier leicht nachrechnen, Automorphismen von G bestimmen. Möge o.B.d.A. $m_1 = \cdots = m_l = 1$ (bei $l \leq k$) gelten. Da nach den vorigen Überlegungen bereits alle Erzeugenden von höherer als der Ordnung 2, die in x in ungerader Potenz auftreten, auch selbst in $UZ(G)$ liegen, finden wir, daß auch

$$x' = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_l^{e_l} b_l^{f_l} \in UZ(G) \tag{12}$$

gilt. Es stellt sich heraus, daß dann ein Element der Gestalt $a_s b_s$ mit $1 \leq s \leq l$, bei dem also $m_s = 1$ ist, in $UZ(G)$ liegt. Ist nämlich in (12)

1. etwa $e_i = 1, f_i = 0$ oder $e_i = 0, f_i = 1$ für $1 \leq i \leq l$, so finden wir

$$\begin{array}{rcl} x'\alpha_i(x') = a_i b_i z & \in & UZ(G) \;;\; z \in Z(G) \\ a_i b_i & \in & UZ(G). \end{array}$$

2. Dasselbe erhalten wir natürlich, falls schon x' selbst diese Gestalt hat.

3. Anderenfalls tritt in (12) eine Sequenz $a_i b_i a_j b_j$ aus mindestens zwei Paaren von Erzeugenden der Ordnung 2 auf ($1 \leq i, j \leq l$). Dann freilich ist

$$\begin{array}{rcl} \beta_{ij}(x')x' & = & a_i a_j b_j a_i b_i b_j z \;; \qquad z \in Z(G) \\ & = & a_j b_i z \\ x'' & := & a_j b_i \in UZ(G). \end{array}$$

   Damit liegt nun wieder Fall 1 vor, so daß wir auch hier für ein s mit $1 \leq s \leq l$ finden, daß $a_s b_s \in UZ(G)$.

Da laut Voraussetzung mit einem auch mindestens zwei Parameter m_i den Wert 1 haben, bestehen nichttriviale Automorphismen von G, die durch

$$\gamma_{ij} \;:\; \left.\begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & a_j \,, \\ b_i & \mapsto & b_j \,, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_i \\ b_j & \mapsto & b_i \end{array}\right\} \text{ für } 1 \leq i, j \leq l \;,\; i \neq j$$

$$\left.\begin{array}{rcl} a_r & \mapsto & a_r \\ b_r & \mapsto & b_r \end{array}\right\} \text{ für } i \neq r \neq j$$

bestimmt sind. Mit a_ib_i liegt vermöge γ_{ij} auch a_jb_j in $UZ(G)$. Damit finden wir weiter

$$\begin{array}{rcl} \beta_{ij}(a_ib_ia_jb_j)a_jb_j & = & a_ia_jb_ja_ib_ib_ja_jb_j \\ & = & b_ib_j \in UZ(G) \ , \\ \beta_{ij}^{-1}(b_ib_j) & = & b_j \in UZ(G) \ , \end{array}$$

woraus mit den Automorphismen α_i und γ_{ij} folgt, daß alle a_i, b_i mit $m_i = 1$ in $UZ(G)$ liegen.

Somit finden wir $a_i, b_i \in UZ(G)$ für alle $i = 1, ..., k$ aus (11). Daraus ersieht man nun sofort, daß alle G-Konjugierten von x bereits unter $UZ(G)$, also schon in U zu x konjugiert sind. Da dieses für jede charakteristische Untergruppe U und für jedes ihrer Elemente x gilt, ist G charakteristisch-quasiprimitiv.

Es bleibt nur noch der Fall, daß G eine 2-Gruppe vom Typ I mit $d \geq 2$ oder eine vom Typ III ist, in der $m_{i_0} = 1$ genau einmal auftritt.

Ist o.B.d.A. $m_1 = 1$, so haben wir in (12) $l \leq 1$, also den Fall $l = 1$ zu untersuchen. Ist hierbei $e_1 = 0$ oder $f_1 = 0$, so folgt $a_1, b_1 \in UZ(G)$ mit dem Automorphismus α_1. Ist jedoch $e_1 = f_1 = 1$, so bemerken wir für Typ III, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rrclcrcll} \delta : & a_1 & \mapsto & a_1b_1a_t \ ; & \qquad & a_i & \mapsto & a_i & \\ & b_1 & \mapsto & b_1 \ ; & & b_i & \mapsto & b_i \ ; & \qquad \text{für } i \neq 1 \end{array}$$

wegen

$$\begin{array}{lll} (a_1b_1a_t)^2 & = a_1^2b_1^2ca_t^2 & = ca_t^2 \\ & = c^2 & = 1; \qquad \text{mit } a_t^2 = c = [a_1, b_1] \end{array}$$

einen Automorphismus von G bestimmt. Für Typ I wählen wir dabei statt des Elementes a_t das Element $c^{2^{d-2}}$. Dieser Automorphismus liefert nun

$$\begin{array}{rcll} \delta(x') & = & \delta(a_1b_1) & \\ & = & a_1b_1a_tb_1 = a_1a_t \quad \in UZ(G) & \text{im Falle Typ III} \\ \text{bzw.} & = & a_1c^{2^{d-2}} \qquad\qquad \in UZ(G) & \text{im Falle Typ I.} \end{array}$$

Aufgrund der obigen Überlegungen für diejenigen Indizes j mit $m_j \geq 2$ folgt daraus $a_t \in UZ(G)$. Damit liegt nach (13) auch a_1, und vermöge α_1 auch b_1 in $UZ(G)$. Daher können wir wie in den vorangegangenen Fällen schließen, daß alle G-Konjugierten von x bereits in $UZ(G)$, also schon unter U zu x konjugiert sind, und zwar für alle charakteristischen Untergruppen U und alle ihre Elemente x. Mithin ist G charakteristisch-quasiprimitiv. $\square$

Lemma 15 sichert für jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe G, daß G' elementarabelsch ist. Für ein $c \in G'$ mit $c \neq 1$ führen wir die Untergruppe Z_c^* durch $Z_c^*/\langle c\rangle = Z(G/\langle c\rangle)$ ein. Genaugenommen ist eine durch die Untergruppe $\langle c\rangle$ von G' indizierte Untergruppe $Z_{\langle c\rangle}^*$ von G gemeint, doch bevorzugen wir der einfacheren Schreibweise wegen die im Text angegebene Form, wobei wir beachten wollen, daß $\langle c_1 \rangle = \langle c_2 \rangle$ stets $Z^*_{c_1} = Z^*_{c_2}$ impliziert. Offensichtlich gilt $Z^*_c = \{x \in G |\ [x, G] \subseteq \langle c \rangle\}$ und $Z^*_c \supseteq Z(G)$.

Proposition 24. *Sind $\langle c_1 \rangle$ und $\langle c_2 \rangle$ verschiedene Untergruppen der Ordnung p von G', so gilt*

$$Z^*_{c_1} \cap Z^*_{c_2} = Z(G)$$

und

$$[Z^*_{c_1}, Z^*_{c_2}] = 1 \ .$$

Beweis: Ist $x \in Z^*_{c_1} \cap Z^*_{c_2}$ und $g \in G$, so folgt

$$g^{-1}xg = xc_1^{i_1} = xc_2^{i_2}$$

mit gewissen $i_1, i_2 \in \{0, 1, ..., p-1\}$, und dann haben wir

$$c_1^{i_1} = c_2^{i_2} \in \langle c_1 \rangle \cap \langle c_2 \rangle = 1 \ ,$$

so daß x mit beliebigem $g \in G$ kommutiert. Das ergibt $Z^*_{c_1} \cap Z^*_{c_2} \subseteq Z(G)$, mithin $Z^*_{c_1} \cap Z^*_{c_2} = Z(G)$.
Die zweite Aussage erhalten wir aus

$$[Z^*_{c_1}, Z^*_{c_2}] \subseteq [Z^*_{c_1}, G] \cap [G, Z^*_{c_2}] \subseteq \langle c_1 \rangle \cap \langle c_2 \rangle = 1. \qquad \square$$

Lemma 25. *Sei G eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe und $c \in G'$.*

1. *Sei U eine charakteristische Untergruppe von Z^*_c. Dann ist U konjugationsautonom in G. Insbesondere ist Z^*_c selbst konjugationsautonom in G.*
2. *Z^*_c ist charakteristisch-quasiprimitiv.*
3. *$Z(Z^*_c) = Z(G)$.*

Beweis: Sicher ist die Untergruppe

$$V := \prod_{\alpha \in Aut(G)} U^\alpha$$

charakteristisch und daher konjugationsautonom in G. Offensichtlich ist $(Z^*_c)^\alpha = Z^*_{c^\alpha}$ für $\alpha \in Aut(G)$. Da verschiedene U^α in verschiedenen $Z^*_{c^\alpha}$ liegen, welche nach Proposition 24 elementweise vertauschbar sind, so wirken in V überhaupt nur Elemente aus U nichttrivial via Konjugation auf U. Daher ist U konjugationsautonom in V und damit in G.
Ist nun K charakteristisch in U, so auch in Z^*_c, also aus denselben Erwägungen konjugationsautonom in G, mithin auch in U. Folglich ist U charakteristisch-quasiprimitiv.

Da Z_c^* konjugationsautonom in G ist, muß ein Element aus $Z(Z_c^*)$ auch mit allen Elementen aus G kommutieren, also in $Z(G)$ liegen. Dann folgt trivialerweise $Z(Z_c^*) = Z(G)$. $\square$

Aus Lemma 25 und der Definition von Z_c^* erhalten wir unmittelbar

Korollar 26. *Ist $Z_c^* \neq Z(G)$, so ist Z_c^* nichtabelsch mit $(Z_c^*)' = \langle c \rangle$.*

Lemma 27. *Ist die Gruppe G das direkte Produkt mit vereinigten zentralen Untergruppen*

$$G = P_1 \curlyvee \cdots \curlyvee P_n$$

aus p_i–Untergruppen P_i mit jeweils primzyklischer Kommutatorgruppe P_i', so ist jeder klassenerhaltende Automorphismus von G ein innerer.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung zunächst für $n = 1$.
Sei σ ein klassenerhaltender Automorphismus der p_1-Gruppe P_1, deren Kommutatorgruppe $P_1' = \langle z \rangle$ sei. Nach Satz 20 ist P_1 von einem der Typen I, II oder für $p_1 = 2$ auch III. Die Wirkung von σ auf P_1 ist demnach eindeutig bestimmt durch die Wirkung auf die nichtzentralen Erzeugenden a_i, b_i $(i = 1, ..., t)$. Da σ klassenerhaltend wirkt, bleibt das kommutatorerzeugende zentrale Element bei Typ I fest und in jedem Fall gilt für die nichtzentralen Erzeugenden a_i, b_i:

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_i z^{k_i}; \qquad 0 \leq k_i < p_1 \\ \sigma(b_i) &= b_i z^{l_i}; \qquad 0 \leq l_i < p_1 \end{aligned}$$

wobei $[b_i, a_i] = z$ sei. Offensichtlich erzielt das Element

$$s_i := a_i^{l_i} b_i^{-k_i}$$

auf a_i und b_i via Konjugation dieselbe Wirkung, während es alle anderen Erzeugenden notwendig zentralisiert, wie wir den in Satz 20 angegebenen Relationen entnehmen. Wählen wir entsprechende s_i für alle $i = 1, ..., t$, so finden wir also, daß

$$s := \prod_{i=1}^{t} s_i$$

via Konjugation auf allen Erzeugenden a_i, b_i, also auf ganz P_1 dieselbe Wirkung erzielt wie σ. Somit ist σ ein innerer Automorphismus von P_1.
Ist nun $G = P_1 \curlyvee \cdots \curlyvee P_n$ mit $n > 1$ und ϱ ein klassenerhaltender Automorphismus von G, so läßt ϱ insbesondere die Normalteiler P_i als Ganze fest, wirkt also auf jedem P_i als – wiederum klassenerhaltender – Automorhismus von P_i. Folglich ist ϱ auf jedem P_i ein etwa durch das Element r_i repräsentierter innerer Automorphismus von P_i. Setzt man nun

$$r := \prod_{j=1}^{n} r_j \ ,$$

so sieht man unmittelbar, daß r auf jedem P_i, also auf ganz G via Konjugation genauso wirkt wie ϱ. Daher ist ϱ ein innerer Automorphismus von G. $\square$

Satz 28. *Jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe G ist das direkte Produkt mit vereinigten Zentren aus dem Erzeugnis H aller Konjugiertenklassen der Längen 1 und p in G und dessen Zentralisator $C_G(H)$.*
Dabei ist

$$H = Z^*_{c_1} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_r} \tag{13}$$

das direkte Produkt mit vereinigten Zentren charakteristisch-quasiprimitiver Untergruppen $Z^*_{c_i}$ von G mit jeweils primzyklischer Kommutatorgruppe, und $C_G(H)$ enthält keine Klasse der Länge p.

Beweis: Enthält G keine Klasse der Länge p, wird der Satz zur Tautologie. Anderenfalls sei $Z^*_{c_1}, ..., Z^*_{c_s}$ die Gesamtheit aller *verschiedenen* Untergruppen der Gestalt Z^*_c mit $c \in G'$. Für $s = 1$ haben wir $H = Z^*_{c_1}$. Ansonsten wählen wir aus der obigen Gesamtheit zunächst $Z^*_{c_{i_1}} := Z^*_{c_1}$ und $Z^*_{c_{i_2}} := Z^*_{c_2}$ aus und sehen anhand von Proposition 24 und Lemma 25,3., daß

$$Z^*_{c_{i_1}} Z^*_{c_{i_2}} = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}} \tag{14}$$

gilt. Möglicherweise ist nun bereits $Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}} = H$. Anderenfalls findet sich $Z^*_{c_{i_3}}$; $i_3 \in \{3, ..., s\}$ mit $Z^*_{c_{i_3}} \not\leq Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}}$.
Sei allgemein $Z^*_{c_{i_{k+1}}} \not\leq Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}}$.
Wir betrachten ein beliebiges $x \in Z^*_{c_{i_{k+1}}} \cap (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}})$. So ein Element kann also in der Form $x = h_1 \cdots h_k$ mit $h_l \in Z^*_{c_{i_l}}$ geschrieben werden. Dabei kann es nicht eintreten, daß mehr als eines der h_l außerhalb $Z(G)$ liegt, da sonst x einer Klasse echt größerer Länge als p angehörte, was $x \in Z^*_{c_{i_{k+1}}}$ widerspräche. Läge genau eines der h_l außerhalb $Z(G)$, also etwa h_1, so folgte $x \notin Z(G)$ und $x \in Z^*_{c_{i_1}} \cap Z^*_{c_{i_{k+1}}}$, was nach Proposition 24 wegen der Verschiedenheit unserer $Z^*_{c_1}, ..., Z^*_{c_s}$ unmöglich ist. Folglich haben wir $x \in Z(G)$. Das ergibt

$$Z^*_{c_{i_{k+1}}} \cap (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}}) = Z(G)$$

und aus Proposition 24 folgt trivialerweise

$$[Z^*_{c_{i_{k+1}}}, (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}})] = 1 \ .$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\langle Z^*_{c_{i_1}}, ..., Z^*_{c_{i_{k+1}}} \rangle = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_{k+1}}} \ .$$

Diese Betrachtung als Induktionsschritt nutzend, schließen wir aus (14) induktiv auf

$$H = \langle Z^*_{c_1}, ..., Z^*_{c_s} \rangle = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_r}}$$

mit $1 \leq r \leq s$ und $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., s\}$. Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir nun die $Z^*_{c_l}$ derart umordnen, daß wir

$$H = Z^*_{c_1} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_r} \tag{15}$$

erhalten. Natürlich ist die Untergruppe H als Erzeugnis aller Klassen der Längen 1 und p charakteristisch in G und daher konjugationsautonom. Jedes Element $g \in G$ induziert daher via Konjugation einen klassenerhaltenden Automorphismus von H, nach Lemma 27 also einen inneren, da H nach (15) und Korollar 26 offenbar das direkte Produkt mit vereinigten Zentren von p-Gruppen mit primzyklischer Kommutatorgruppe ist. Folglich unterscheidet sich jedes Element von G nur um ein H zentralisierendes Element von einem Element aus H. Somit haben wir

$$G = HC_G(H)\ . \tag{16}$$

Lemma 25,3. zusammen mit (15) lehrt $Z(G) \leq Z(H)$. Andrerseits ist mit H auch $Z(H)$ charakteristisch in G, so daß aufgrund der charakteristischen Quasiprimitivität von G sofort $Z(H) = Z(G)$ folgt. Mit H ist freilich auch $C_G(H)$ charakteristisch in G, trivial gilt $Z(G) \leq Z(C_G(H))$, also auch hier $Z(G) = Z(C_G(H))$ wegen der charakteristischen Quasiprimitivität von G. Somit haben wir

$$Z(G) = Z(H) = H \cap C_G(H) = Z(C_G(H)) \tag{17}$$

und trivialerweise gilt $[H, C_G(H)] = 1$. Mit (16) und (17) folgt daraus

$$G = H \curlyvee C_G(H)\ . \tag{18}$$

Die charakteristische Quasiprimitivität der $Z^*_{c_l}$ ist durch Lemma 25 bereits gesichert. Daß $C_G(H)$ keine Klasse der Länge p enthält, folgt aus der Konjugationsautonomie von $C_G(H)$ als charakteristischer Untergruppe von G, Gleichung (17) und dem Umstand, daß H alle Klassen der Länge p von G enthält. □

Für charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 finden wir, daß nach der Zerlegung gemäß Satz 28 der auftretende Zentralisator $C_G(H)$, sofern er nicht abelsch und daher zentral in G ist, die Eigenschaft hat, daß jedes nichtzentrale Element aus $C_G(H)$ eine Konjugiertheitsklasse der Länge p^2 aufspannt. Daher ist $C_G(H)$ nach Satz [4.7] aus [2] eine nichtabelsche SNC-Gruppe. Die SNC-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 mit dem Zentrumsindex p^4 und elementarabelschem Zentrum sind nun in [9] vollständig klassifiziert. In [3] wird diese Klassifikation zur Feststellung der charakteristisch-quasiprimitiven unter den direkt unzerlegbaren Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 mit elementarabelschem Zentrum vom Index p^4 und ohne Klassen der Länge p benutzt. Das liefert Beispiele für charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppen, die nicht aus ihren Klassen der Länge p erzeugt werden.

In Anlehnung an die Notation in [9] bezeichnen wir dabei mit z_i Basiselemente des Zentrums der betrachteten Gruppen, wobei die Kommutatorgruppe standardmäßig von z_1 und z_2 erzeugt wird. Wir entnehmen [9], daß es in jeder dieser Gruppen G Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 gibt, mit denen $A := \langle a_1, a_2 \rangle$ und $B := \langle b_1, b_2 \rangle$ abelsche Normalteiler von G mit der Eigenschaft $AB = G$ und $A \cap B = Z(G)$ sind. Es wird ferner gezeigt, daß diese Elemente sogar so gewählt werden können, daß eine Normalform der zwischen ihnen bestehenden Kommutatorbeziehungen erreicht wird. Für $p \neq 2$ lautet diese:

$$\begin{array}{rclcrcl} [a_1, b_1] & = & z_1 & ; & [a_1, b_2] & = & z_2 \ ; \\ [a_2, b_1] & = & z_2 & ; & [a_2, b_2] & = & z_1^c \end{array}$$

mit einem modulo p nichtquadratischen c. Dabei ergeben sich für alle Nichtquadrate c modulo p isomorphe Gruppen.
Für $p = 2$ lauten die Kommutatorrelationen

$$\begin{array}{rclcrcl} [a_1, b_1] & = & z_1 & ; & [a_1, b_2] & = & z_2 \ ; \\ [a_2, b_1] & = & z_2 & ; & [a_2, b_2] & = & z_1 z_2 \ . \end{array}$$

In [9] werden die nichtisomorphen Gruppen schließlich durch Relationen angegeben, welche zusammen mit der Normalform der Kommutatorrelationen (oder explizit angegebener anderer) sowie der Vertauschbarkeit der a_i bzw. b_i jeweils untereinander die Gruppen gerade bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen. In [3] wird ermittelt, daß darunter genau die für $p > 2$ durch

$$\begin{array}{llll} [9]-(1): & a_1^p = 1 \quad a_2^p = 1 & b_1^p = 1 & b_2^p = 1 \\ [9]-(6): & a_1^p = z_3 \quad a_2^p = z_4 & b_1^p = z_5 & b_2^p = z_6 \ . \end{array}$$

und für $p = 2$ die durch

$$\begin{array}{lrclcrclcrclcrcl} [9]-(S0): & a_1^2 & = & z_2 & ; & a_2^2 & = & z_1 & ; & b_1^2 & = & z_2 & ; & b_2^2 & = & z_1 \ , \\ [9]-(S1): & a_1^2 & = & 1 & ; & a_2^2 & = & 1 & ; & b_1^2 & = & 1 & ; & b_2^2 & = & 1 \ , \\ [9]-(17): & a_1^2 & = & z_3 & ; & a_2^2 & = & z_4 & ; & b_1^2 & = & z_5 & ; & b_2^2 & = & z_6 \end{array}$$

bestimmten Gruppen charakteristisch-quasiprimitiv sind.

Literatur

[1] **Aschbacher, M.**; Finite group theory, Cambridge University Press 1986, (Cambridge studies in advanced mathematics; 10)

[2] **Bannuscher, W.**; Über Gruppen mit höchstens zwei irreduziblen Charaktergraden, Habilitationsschrift, Universität Rostock, 1989

[3] **Bartsch, R.**; Über Gruppen, deren irreduzible Charaktere sämtlich quasiprimitiv sind, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1996

[4] **Feit, W., Seitz, G.M.**; On finite rational groups and related topics, Illinois J.Math. 33 (1989), 103-131

[5] **Huppert, B.**; Endliche Gruppen I, 2. Nachdruck d. 1. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983

[6] **Huppert, B., Blackburn, N.**; Finite Groups III, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1982

[7] **Isaacs, I.M.**; Character Theory of finite groups, New York 1976

[8] **Kochendörffer, R.**; Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen, Leipzig 1966

[9] **Langemann, D.**; Zur Klassifikation von SNC-Gruppen mit elementar abelschem Zentrum, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1995

[10] **Liermann, H.**; Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist, Inauguraldissertation, 1939, Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ Band 4, 183-207

[11] **Pazderski, G.**; Vorlesung „p-Gruppen“ an der Universität Rostock 1966-68

[12] **Sah, C.-H.**; Existence of normal complements and extensions of characters in finite groups, Illinois J. Math. 6, 282-291 (1962)

[13] **Schwarz, L.**; Normierte Erzeugendensysteme für endliche p-Gruppen mit zyklischer Kommutatorgruppe, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1968

René Bartsch; Gerhard Pazderski
Universität Rostock
Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1
D-18055 ROSTOCK
Germany

e-mail: nfa546@hp1.uni-rostock.de
math@marvinius.net