Diplomarbeit

Über Gruppen, deren irreduzible Charaktere sämtlich quasiprimitiv sind

eingereicht
am
Fachbereich Mathematik
der
Universität Rostock

von
René Bartsch
geboren am : 20. Mai 1970

Betreuer: Prof. Dr. G. Pazderski
Fachbereich Mathematik der Universität Rostock

Rostock, den 31. Januar 1996

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen

$\langle x\rangle_{Aut(G)}$	: $=\langle x^{\alpha}\|\alpha \in Aut(G)\rangle$, die minimale charakteristische Untergruppe von G, die das Element x enthält
$\langle x\rangle_p$	: vom Element x erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung p
$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$	: Mengen der komplexen, reellen, rationalen und ganzen Zahlen
1	: je nach Sachlage ganze Zahl oder neutrales Element einer Gruppe
G'	: Kommutatorgruppe der Gruppe G
$G^{(n)}$	: n-te Kommutatorgruppe der Gruppe G
$ord(x)$	: Ordnung des Gruppenelementes x
$\mathcal{G}al(L\|K)$	: Galois-Gruppe der galois'schen Körpererweiterung L über K
(n,m)	: größter gemeinsamer Teiler der ganzen Zahlen m und n
$\Phi(G)$	: Frattini-Gruppe von G
$Z(G)$	: Zentrum der Gruppe G
$Z^n(G)$	: n-tes Glied der aufsteigenden Zentralreihe von G
$Z^{\infty}(G)$	: Hyperzentrum der Gruppe G
$C_G(X)$	: Zentralisator der Untergruppe X in der Gruppe G
p	: Primzahl
χ_N	: Einschränkung des Charakters χ einer Gruppe G auf den Normalteiler $N \trianglelefteq G$
ν^G	: vom Charakter ν einer Untergruppe U auf G induzierter Charakter
$A \curlyvee B$	: direktes Produkt von A und B bei vereinigten Zentren
χ^g	: via $g \in G$ zu $\chi \in Irr(N), N \trianglelefteq G$ konjugierter Charakter $\chi^g(x) = \chi(x^{g^{-1}})$
$Irr(X)$	: Menge aller irreduziblen Charaktere einer Gruppe X
$\alpha,\beta,\gamma,\kappa...$	: Automorphismen von Gruppen bzw. Körpern
SNC–Gruppe	: in der Arbeit [2] erklärte Gruppe; SNC steht für *„small number of characters"*.
S_{Γ}	: Gruppe aller Permutationen auf der Menge Γ

1 Einleitung

Viele zentrale Begriffe der Gruppentheorie, wie etwa Auflösbarkeit, Nilpotenz oder Regularität, sind Verallgemeinerungen des Begriffes der Kommutativität in dem Sinne, daß jede abelsche Gruppe die jeweils definierenden Bedingungen trivial erfüllt. Ähnliches gilt für den Begriff der einfachen Gruppe, der - insbesondere für den nichtabelschen Fall - interessante Weiterungen wie charakteristische Einfachheit, vollständige Reduzibilität oder Vollkommenheit erfahren hat.
Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer gemeinsamen Verallgemeinerung von Kommutativität und Einfachheit. Der Begriff der *Quasiprimitivität einer Gruppe* wird einleitend in naheliegender Weise charaktertheoretisch kurz motiviert und definiert. Ziel der Arbeit ist es, eine erste Einordnung der somit eingeführten Eigenschaft in die vorhandene gruppentheoretische Systematik vorzunehmen.

Zu Beginn des 3. Abschnittes wird eine äquivalente Beschreibung quasiprimitiver Gruppen ohne direkten Bezug auf Gruppencharaktere gegeben, die stattdessen eine mit *„Konjugationsautonomie“* salopp skizzierte Eigenschaft *aller* Normalteiler innerhalb einer quasiprimitiven Gruppe etabliert. Unter Verwendung dieser Beschreibung wird gezeigt, daß sich Quasiprimitivität auf Normalteiler und Faktorgruppen überträgt. In dem Bestreben, andere quasiprimitive Gruppen als abelsche und einfache zu finden, stellt sich heraus, daß eine nichtabelsche quasiprimitive Gruppe nicht einmal auflösbar sein kann. Im Zusammenhang mit den Vererbungseigenschaften der Quasiprimitivität und der grundlegenden Charakterisierung am Anfang der Arbeit führt dieser Umstand schließlich auf eine strukturelle Beschreibung quasiprimitiver Gruppen (Satz 25). Aus diesem Struktursatz folgt dann unmittelbar, daß sich Quasiprimitivität auch auf direkte Produkte überträgt. Daß diese Beschreibung alle quasiprimitiven Gruppen umfaßt, beruht wesentlich auf einem Satz über einfache Gruppen, den W.Feit und G.M.Seitz (in [6]) 1988 bewiesen, und der eine Vermutung Burnside's von 1897, die – wie Burnside selbst schon 1911 anhand eines Beispieles zeigte – nicht allgemein gilt, immerhin für einfache Gruppen bestätigt.

Der 4. Abschnitt enthält Überlegungen zu möglichen Abschwächungen des Begriffes Quasiprimitivität und referiert im wesentlichen die zugehörigen Modifikationen der im 3. Abschnitt gewonnenen Aussagen zur vollen Quasiprimitivität. Insbesondere sind auch hier auflösbare Gruppen von Interesse, da die betrachteten Abschwächungen der Quasiprimitivität nicht unmittelbar die Kommutativität einer auflösbaren Gruppe zur Folge haben, aber z.B. Nilpotenz von kleiner Klasse erwirken.

Alle betrachteten Gruppen sind endlich, auch wenn das im Einzelfall nicht noch einmal betont wird.

Ich möchte nicht versäumen, an dieser Stelle denjenigen Menschen zu danken, ohne die mein Leben ärmer und jedenfalls diese Arbeit nicht zustandegekommen wäre. Mein Dank gilt insbesondere meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. G. Pazderski, der mein Interesse für die Algebra geweckt und befördert hat, Herrn Prof. Dr. H. Poppe, dem ich anregende Einblicke in andere mathematische Disziplinen verdanke, sowie Herrn Dr.rer.nat.habil. W. Bannuscher für die Vermittlung einer gewissen Freude an der Mathematik schon zu Schulzeiten.

Ein ganz persönliches, stilles Dankeschön geht an André Galen, Arne Klawitter, Heiko Sturm.

René Bartsch

Rostock, den 31. Januar 1996

2 Grundlegende Definitionen und Sätze

2.1 Der Begriff der quasiprimitiven Gruppe

Die irreduziblen komplexen Charaktere einer Gruppe bilden bekanntlich eine Basis des Vektorraumes der komplexen Klassenfunktionen auf dieser Gruppe. Insbesondere ist also jeder Charakter der Gruppe eine Linearkombination der irreduziblen Charaktere mit eindeutig bestimmten (nichtnegativen ganzen) Koeffizienten. Umgekehrt ist jede derartige Summe ein Charakter der Gruppe. Darunter können wir diejenigen auszeichnen, die Vielfaches eines einzigen irreduziblen Charakters sind.

1. Definition
Ist N eine Gruppe und ϑ ein Charakter auf N, so heißt ϑ **homogen** *genau dann, wenn ϑ ein Vielfaches eines irreduziblen Charakters von N ist.*
Ein Charakter χ einer Gruppe G mit $N \trianglelefteq G$ **zerfällt homogen** *über N genau dann, wenn χ_N homogen ist.*

Nun mag ein beliebiger Charakter der Gruppe G über diesem oder jenem Normalteiler von G homogen zerfallen und über anderen nicht. Es finden sich jedoch zuweilen Charaktere, die über *allen* Normalteilern N einer Gruppe G homogen zerfallen. Solche fallen in natürlicher Weise bei der Untersuchung induzierter Charaktere einer Gruppe G auf. Analog zu Permutationsgruppen kann man nämlich versuchen, einen gegebenen Darstellungsmodul M von G in echte Untermoduln derart zu zerlegen, daß diese bei der Wirkung von G als Ganze permutiert werden. Ist eine solche *Imprimitivitätszerlegung* nicht möglich, so heißt M und auch der von M auf G bewirkte Charakter *primitiv.* Existiert jedoch eine Imprimitivitätszerlegung, so ist der von M auf G bewirkte Charakter genau derjenige, den man erhält, wenn man den von einer Komponente der Imprimitivitätszerlegung auf deren Stabilisatorgruppe bewirkten Charakter nach G induziert. Umgekehrt läßt sich zeigen, daß jeder induzierte Charakter auf G zu einem Modul gehört, der eine Imprimitivitätszerlegung gestattet (vgl. [11] Kap.5).
Es gilt

2. Satz
Ist $\chi \in Irr(G)$ primitiv, so zerfällt χ homogen über jedem Normalteiler $N \trianglelefteq G$.

(Ein Beweis findet sich z.B. in [11], Kap.6.)

Die Umkehrung gilt freilich nicht, wie man beispielsweise am irreduziblen Charakter ψ vom Grade 5 der alternierenden Gruppe A_5 erkennt. Da die A_5 einfach ist, steht die Homogenität des Zerfalls über jedem Normalteiler außer Frage, doch ψ ist imprimitiv.

3. Definition
Ein irreduzibler Charakter χ einer Gruppe G heißt **quasiprimitiv** *genau dann, wenn er über jedem Normalteiler von G homogen zerfällt.*

Dieser Definition genügen alle irreduziblen Charaktere einfacher Gruppen G in trivialer Weise, da gar keine Normalteiler außer 1 und G vorliegen. Doch auch in abelschen Gruppen, in denen immerhin jede Untergruppe normal ist, genügen alle irreduziblen Charaktere der Definition, denn als sämtlich lineare Charaktere zerfallen sie natürlich überhaupt nicht. Daß es also immerhin große Klassen von Gruppen gibt, deren irreduzible Charaktere sämtlich quasiprimitiv sind, motiviert die folgende Begriffsbildung.

4. Definition
Eine endliche Gruppe G heißt **quasiprimitiv** *genau dann, wenn alle irreduziblen Charaktere von G quasiprimitiv sind.*

2.2 Einfache Gruppen

In diesem Abschnitt sollen noch einige nützliche Bemerkungen zusammengestellt werden, die nicht direkt auf Quasiprimitivität Bezug nehmen.

5. Satz
Sei G eine endliche einfache Gruppe. Dann sind alle Automorphismen von G, die die Konjugiertheitsklassen von G fixieren, innere Automorphismen.

Ein Beweis dieses sehr bemerkenswerten und meines Wissens erst 1988 unter Verwendung des Klassifikationstheorems für endliche einfache Gruppen erhaltenen Satzes findet sich in [6].

6. Korollar
Ist G vollständig reduzibel, so sind alle klassenerhaltenden Automorphismen von G innere.

Beweis:
Sei etwa $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ mit einfachen Gruppen G_i, und sei α ein klassenerhaltender Automorphismus von G. Da jedes G_i normal in G ist, besteht es aus vollen G-Klassen, wird also unter α auf sich selbst abgebildet. Daher induziert α auf jedem G_i einen Automorphismus $\alpha_i \in Aut(G_i)$. Da alle anderen direkten Faktoren G_i zentralisieren, sind die G-Klassen in G_i gerade die Konjugiertheitsklassen von G_i. Daher muß α_i auf G_i klassenerhaltend wirken, ist somit nach Satz 5 ein innerer Automorphismus von G_i, vermittelt durch ein $k_i(\alpha) \in G_i$. Damit ist nun α offensichtlich ein durch $k_1(\alpha) \cdots k_n(\alpha)$ vermittelter innerer Automorphismus von G.

q.e.d.

7. Definition
Eine Gruppe G heißt **quasieinfach**, *genau dann, wenn die Faktorgruppe $G/Z(G)$ einfach ist.*

Offenbar sind als quasieinfache auflösbare Gruppen allenfalls die abelschen aufzufassen.

2.3 Kommutatoren, Klasse-2-nilpotente und p-Gruppen

In Abschnitt 4.1 werden einige Hilfsmittel in Hinblick auf gewisse Eigenschaften von p-Gruppen benötigt.

8. Lemma
In einer Gruppe G, die nilpotent von der Klasse 2 ist, ist die Kommutatorbildung assoziativ und mit der Gruppenmultiplikation beidseitig distributiv, d.h.:

$$\forall a, b, c \in G : [[a, b], c] = [a, [b, c]] \tag{i}$$
$$\forall a, b, c \in G : [ab, c] = [a, c][b, c] \tag{ii}$$
$$\forall a, b, c \in G : [a, bc] = [a, b][a, c] \tag{iii}$$

Gilt umgekehrt in einer Gruppe G eine dieser Beziehungen, so ist G nilpotent höchstens von der Klasse 2.

Beweis: (nach [13])
In einer nilpotenten Gruppe der Klasse 2 gilt (i) trivialerweise, da schon der jeweils innere Kommutator im Zentrum von G liegt, so daß beide Seiten gleich 1 werden.
Möge umgekehrt (i) in einer Gruppe G gelten. Setzen wir darin $c = b$, so erhalten wir $[[a, b], b] = 1$, also $[a, b]^{-1} = b^{-1}[a, b]^{-1}b$, was wiederum $b[a, b]^{-1}b^{-1} = [a, b]^{-1}$ ergibt. Daraus errechnet man nun leicht

$$[a, b]^{-1} = [a, b^{-1}] \tag{iv}$$

Da a, b beliebig sind, können wir aus (iv) auf

$$[a, b]^{-1} = [a^{-1}, b] \tag{v}$$

schließen. Durch Wahl von b^{-1} für b erhalten wir aus (iv) und (v)

$$[a, b] = [a^{-1}, b^{-1}] \tag{vi}$$

Diese Formeln im Hintergrund berechnen wir jetzt getrennt die linke und die rechte Seite der Assoziativitätsformel

$$[[a, b], c] = \left[[a, b]^{-1}, c^{-1}\right] = [a, b]\, c\, [a, b]^{-1}\, c^{-1} = \left[a^{-1}, b^{-1}\right] c \left[a^{-1}, b\right] c^{-1}$$
$$[a, [b, c]] = \left[a^{-1}, [b, c]^{-1}\right] = a\, [b, c]\, a^{-1}\, [b, c]^{-1} = a \left[c^{-1}, b\right] a^{-1} \left[b, c^{-1}\right]$$

und setzen diese gleich. Alle Variablen auf eine Seite verschiebend erhalten wir

$$\begin{aligned} ba^{-1}b^{-1}cab^{-1}a^{-1}c^{-1}bab^{-1}cbc^{-1} &= 1 \\ \left[b^{-1}c, a\right] b^{-1} \left[a, b^{-1}c\right] b &= 1 \\ \left[\left[a, b^{-1}c\right], b\right] &= 1 \end{aligned}$$

Freilich sind die Elemente $a, b^{-1}c, b$ wiederum voneinander unabhängige beliebige Elemente von G, woraus erhellt, daß jeder Kommutator zweier Elemente von G mit jedem Element von G vertauschbar ist. Mithin ist G nilpotent höchstens von der Klasse 2.
Weiterhin berechnet man schnell

$$\begin{aligned} [ab, c] &= b^{-1}a^{-1}c^{-1}abc \\ &= b^{-1}a^{-1}c^{-1}acc^{-1}bc \\ &= b^{-1}[a, c]\, c^{-1}bc \\ &= [a, c]\,[b, c] \end{aligned}$$

und analog $[a, bc] = [a, b]\,[a, c]$ für nilpotente Gruppen G von der Klasse 2. Auch ist klar, daß diese Gleichungen nur gelten können, wenn jeder Kommutator $[a, c]$ mit jedem Element b aus G vertauschbar - also G nilpotent von der Klasse 2 - ist.

q.e.d.

In Abschnitt 4.1 werden wir den folgenden Satz von C. Hobby (siehe [8]; S.306, Satz 7.8 (c)) verwenden:

9. Satz
Ist in einer endlichen p-Gruppe $Z(\Phi(G))$ zyklisch, so auch $\Phi(G)$.

Eine genaue Charakterisierung der p-Gruppen von der Kommutatorgruppenordnung p gibt Liermann in [17] für ungerades p, die Prof. Pazderski in [18] für $p = 2$ vervollständigt hat:

10. Satz
Eine Gruppe G ist genau dann von der Ordnung p^n (p prim), der Kommutatorgruppenordnung p und direkt unzerlegbar, wenn eine der folgenden Aussagen zutrifft:

I.) $p \geq 2$, $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t, c\rangle$ *mit den Relationen*

$$\begin{aligned} a_i^{p^{m_i}} = b_i^{p^{n_i}} = c^{p^d} = 1 \quad &; \\ a_i c = c a_i;\ b_j c = c b_j \quad &; \\ b_i a_i = a_i b_i c^{p^{d-1}} \quad &; \quad i = 1, ..., t \\ a_i b_j = b_j a_i \quad &; \quad i \neq j \end{aligned}$$

und den Zahlbedingungen

$$t \geq 1, \qquad d \geq 1, \qquad m_i, n_i \geq 1$$
$$i = 1, ..., t$$
$$m_1 + \cdots + m_t + n_1 + \cdots + n_t + d = n \ .$$

II.) *$p \geq 2$; $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t \rangle$ mit den Relationen*

$$\begin{aligned} a_i^{p^{m_i}} = b_i^{p^{n_i}} = 1 \quad &; \\ b_i a_i = a_i b_i b_t^{p^{n_t - 1}} \quad &; \quad i = 1, ..., t \\ a_i b_j = b_j a_i \quad &; \quad i \neq j \end{aligned}$$

und den Zahlbedingungen

$$\begin{aligned} t \geq 1 \quad &; \\ m_i, n_i \geq 1 \quad &; \quad i = 1, ..., t \\ n_t \geq 2 \quad &; \\ m_1 + \cdots + m_t + n_1 + \cdots n_t = n \quad &. \end{aligned}$$

III.) *$p = 2$; $G = \langle a_1, ..., a_t, b_1, ..., b_t \rangle$ mit den Relationen*

$$\begin{aligned} a_i^{2^{m_i}} = b_i^{2^{n_i}} = 1 \quad &; \quad i = 1, ..., t-1 \\ a_t^2 = b_t^2 = c \quad &; \quad c^2 = 1 \\ b_i a_i = a_i b_i c \quad &; \quad i = 1, ..., t \\ a_i b_j = b_j a_i \quad &; \quad i \neq j \end{aligned}$$

und den Zahlbedingungen

$$t \geq 1; \qquad m_i, n_i \geq 1; \qquad i = 1, ..., t-1$$
$$m_1 + \cdots + m_{t-1} + n_1 + \cdots + n_{t-1} + 3 = n \quad .$$

Für die drei Typen erweist sich eine Kurzbezeichnung als sinnvoll, aus der alle konstituierenden Koeffizienten bequem abgelesen werden können:
Typ **I**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ n_1, & ..., & n_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p$$

Typ **II**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & m_t \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{n_t} \end{pmatrix}_p$$

Typ **III**:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2$$

Die unterstrichenen Koeffizienten zeigen jeweils an, welchen Elementes Potenz der Kommutator ist. Bezogen auf diese Schemata als Bezeichnungen für die betrachteten p-Gruppen, beweist Prof. Pazderski in [18] folgende Isomorphieaussagen:

11. Satz
Zwei Schemata, die durch Vertauschung der Spalten ohne unterstrichenes Element oder durch Vertauschung der Elemente einer solchen Spalte auseinander hervorgehen, wollen wir nicht unterscheiden. Sie beschreiben isomorphe Gruppen. Außerdem gilt:

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & , & 1 & & \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & , & 1 & ; & \underline{1} \end{pmatrix}_2 \cong \begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & 1 \\ n_1, & ..., & n_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2$$

Mit dieser Ausnahme liefern alle gemäß obiger Vereinbarung unterschiedenen Systeme nichtisomorphe Gruppen.

12. Lemma
Ist die Gruppe G das direkte Produkt mit vereinigten zentralen Untergruppen

$$G = P_1 \curlyvee \cdots \curlyvee P_n$$

aus p_i–Untergruppen P_i mit jeweils primzyklischer Kommutatorgruppe P_i', so ist jeder klassenerhaltende Automorphismus von G ein innerer.

Beweis:
Wir beweisen die Behauptung zunächst für $n = 1$.
Sei σ ein klassenerhaltender Automorphismus der p_1-Gruppe P_1, deren Kommutatorgruppe $P_1' = \langle z \rangle_{p_1}$ sei. Nach Satz 10 ist P_1 von einem der Typen I, II oder für $p_1 = 2$ auch III. Die Wirkung von σ auf P_1 ist demnach eindeutig bestimmt durch die Wirkung auf die nichtzentralen Erzeugenden a_i, b_i $(i = 1, ..., t)$. Da σ klassenerhaltend wirkt, bleibt das kommutatorerzeugende zentrale Element bei Typ I fest und in jedem Fall gilt für die nichtzentralen Erzeugenden a_i, b_i:

$$\begin{aligned} \sigma(a_i) &= a_i z^{k_i}; \qquad 0 \leq k_i < p_1 \\ \sigma(b_i) &= b_i z^{l_i}; \qquad 0 \leq l_i < p_1 \end{aligned}$$

wobei $[b_i, a_i] = z$ sei. Offensichtlich erzielt das Element

$$s_i := a_i^{l_i} b_i^{-k_i}$$

auf a_i und b_i via Konjugation dieselbe Wirkung, während es alle anderen Erzeugenden notwendig zentralisiert, wie wir den in Satz 10 angegebenen Relationen entnehmen. Wählen wir entsprechende s_i für alle $i = 1, ..., t$, so finden wir also, daß

$$s := \prod_{i=1}^{t} s_i$$

via Konjugation auf allen Erzeugenden a_i, b_i, also auf ganz P_1 dieselbe Wirkung erzielt wie σ. Somit ist σ ein innerer Automorphismus von P_1.
Ist nun $G = P_1 \curlyvee \cdots \curlyvee P_n$ mit $n > 1$ und ϱ ein klassenerhaltender Automorphismus von G, so läßt ϱ insbesondere die Normalteiler P_i als Ganze fest, wirkt also auf jedem P_i als – wiederum klassenerhaltender – Automorhismus von P_i. Folglich ist ϱ auf jedem P_i ein etwa durch das Element r_i repräsentierter innerer Automorphismus von P_i. Setzt man nun

$$r := \prod_{j=1}^{n} r_j \ ,$$

so sieht man unmittelbar, daß r auf jedem P_i, also auf ganz G via Konjugation genauso wirkt wie ϱ. Daher ist ϱ ein innerer Automorphismus von G.

q.e.d.

Bekannt (siehe etwa [12],[8],[1]) und übrigens direkt nachzurechnen ist das sogenannte „Drei-Untergruppen-Lemma“:

13. Lemma
Seien A, B, C Untergruppen einer Gruppe G, für die $[A, B, C] = [B, C, A] = 1$ gilt. Dann ist auch $[C, A, B] = 1$.

14. Definition
Ist G eine p-Gruppe und $x \in G$, so nennen wir die Zahl

$$\beta(x) := log_p(|G : C_G(x)|)$$

die **Breite** *von x in G.*

Offensichtlich ist damit $p^{\beta(x)}$ die Anzahl der zu x in G konjugierten Elemente.

3 Quasiprimitivität

15. Satz
Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G.
Genau dann zerfallen über N alle irreduziblen Charaktere von G homogen, wenn je zwei Elemente von N, die unter G konjugiert sind, bereits in N konjugiert sind.

Beweis:
Seien $\chi \in Irr(G)$, $N \trianglelefteq G$, $\vartheta \in Irr(N)$ mit $e = [\chi_N; \vartheta] \neq 0$, sowie $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, ...\vartheta_t$ die verschiedenen Konjugierten von ϑ unter G.
Nach dem Cliffordschen Satz (siehe [11]) ist dann

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^{t} \vartheta_i \qquad \text{(vii)}$$

Insbesondere treten alle G-Konjugierten von ϑ in χ_N auf. Ein Charakter $\chi \in Irr(G)$ mit $[\vartheta, \chi_N] \neq 0$ zerfällt also über N genau dann homogen, wenn ϑ unter G nur zu sich selbst konjugiert ist. (I)
Andrerseits existiert für jedes $\nu \in Irr(N)$ ein $\varphi \in Irr(G)$, so daß $[\varphi_N, \nu] \neq 0$ gilt, was man wie folgt einsieht: Da ν^G ein Charakter auf G ist, existiert ein $\varphi \in Irr(G)$ mit $[\nu^G, \varphi] \neq 0$, woraus nach der Frobenius-Reziprozität $[\nu, \varphi_N] \neq 0$ folgt. Mit (I) ergibt das, daß genau dann alle $\chi \in Irr(G)$ über N homogen zerfallen, wenn alle $\vartheta \in Irr(N)$ unter G fest bleiben. (II)
Offenkundig wirkt G durch Konjugation permutierend sowohl auf den irreduziblen Charakteren von N, als auch auf den Konjugiertenklassen von N. Gemäß Definition konjugierter Charaktere ist dabei $\chi^g(n) := \chi(n^{g^{-1}})$, also

$$\forall g \in G, n \in N : \chi^g(n^g) = \chi(n) \qquad \text{(viii)}$$

Nach dem Brauerschen Satz über Gruppen, die sowohl die irreduziblen Charaktere, als auch die Konjugiertenklassen einer weiteren Gruppe (in unserm Fall N) permutieren, und dabei der Bedingung (viii) genügen, ist die Anzahl der dabei fixierten irreduziblen Charaktere gleich der Anzahl der fixierten Konjugiertenklassen (siehe [11]). Da überdies stets $|Irr(N)|$ gleich der Anzahl der Konjugiertenklassen von N ist, folgt daraus, daß genau dann alle $\vartheta \in Irr(N)$ unter G fest bleiben, wenn alle Konjugiertenklassen von N unter G fest bleiben.
Mit (II) folgt daraus, daß genau dann alle $\chi \in Irr(G)$ über N homogen zerfallen, wenn alle Elemente von N, die unter G konjugiert sind, bereits unter N konjugiert sind.

q.e.d.

Daß diese Eigenschaft gewisser Normalteiler innerhalb einer gegebenen Gruppe eine bedeutende Rolle in den weiteren Betrachtungen spielt, gibt einen hinreichenden Anlaß, sie zu benennen:

16. Definition
Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G.
Wir nennen N **konjugationsautonom**[1] *(oder kurz* **autonom***) in G genau dann, wenn je zwei Elemente aus N, die unter G konjugiert sind, bereits unter N konjugiert sind.*

17. Satz
Eine Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn in ihr alle Normalteiler konjugationsautonom sind.

Beweis:
Laut Definition ist G genau dann quasiprimitiv, wenn über jedem Normalteiler von G alle irreduziblen Charaktere von G homogen zerfallen, was mit Satz 15 genau dann der Fall ist, wenn alle Normalteiler in G konjugationsautonom sind.
q.e.d.

18. Korollar
Ist G eine quasiprimitive Gruppe, so ist in G die Normalteilerrelation transitiv, d.h. aus $M \trianglelefteq N$ und $N \trianglelefteq G$ folgt stets $M \trianglelefteq G$.

Beweis:
Sei $N \trianglelefteq G$ und $M \trianglelefteq N$, sowie $g \in G$. Für $m \in M$ ist m^g ein in G konjugiertes Element. Daher gibt es laut Satz 17 ein $g' \in N$ mit $m^g = m^{g'}$ (da auch $m \in N$). In N ist M aber normal laut Voraussetzung, also $m^g = m^{g'} \in M$.
Da dies für alle $m \in M$ und beliebiges $g \in G$ gilt, haben wir $M^g = M; \forall g \in G$, also $M \trianglelefteq G$.
q.e.d.

19. Korollar
Ist eine Gruppe G quasiprimitiv, so ist auch jeder Normalteiler $N \trianglelefteq G$ und jede Faktorgruppe G/N quasiprimitiv.

Beweis:
Sei $N \trianglelefteq G$. Korollar 18 sichert, daß jeder Normalteiler M von N auch Normalteiler von G ist. Daher sind nach Satz 17 alle Elemente von M, die unter N, also unter G konjugiert sind, bereits in M selbst konjugiert. Da dies für jeden Normalteiler von N gilt, besagt Satz 17 gerade, daß N quasiprimitiv ist.
Ist $N \trianglelefteq G$, so sind die irreduziblen Charaktere von G/N genau diejenigen irreduziblen Charaktere von G, in deren Kern N liegt (siehe etwa [11], Lemma 2.22). Als solche sind sie nach Voraussetzung quasiprimitiv.
q.e.d.

[1] **Sah** verwendet in [20] das englische Wort „*c-closed*“ für denselben Sachverhalt.

Da abelsche Gruppen stets quasiprimitiv sind, liegt es auch im Sinne der einleitenden Betrachtungen nahe, danach zu fragen, ob vielleicht bereits die eingangs erwähnten klassischen Verallgemeinerungen der Kommutativität die Quasiprimitivität einer Gruppe bewirken.

20. Lemma

Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv und auflösbar, wenn sie abelsch ist. (Siehe auch [11], Problem (6.6))

Beweis:

Eine abelsche Gruppe ist in trivialer Weise auflösbar und quasiprimitiv; wir müssen also nur zeigen, daß jede quasiprimitive und auflösbare Gruppe abelsch ist. Angenommen, G sei ein minimales Gegenbeispiel.

Dann ist G jedenfalls nicht einfach, und wir können einen maximalen echten Normalteiler $N \lhd G$ auswählen. Gemäß Korollar 19 ist N quasiprimitiv und natürlich auflösbar. Daher ist N wegen der Minimalität von G abelsch. Weil gemäß Satz 17 G auf N keine anderen Konjugationen bewirkt als N selbst, gilt also $N \trianglelefteq Z(G)$. Überdies ist G/N natürlich auflösbar, wegen der Maximalität von N einfach, also zyklisch von Primzahlordnung. Mit $N \trianglelefteq Z(G)$ folgt daraus aber, daß G im Widerspruch zur Annahme abelsch ist. Mithin existiert kein kleinstes, und daher überhaupt kein Gegenbeispiel.

q.e.d.

Das Lemma lehrt, daß Quasiprimitivität und Auflösbarkeit die Kommutativität in eklatant verschiedener Weise verallgemeinern, da ihr Durchschnitt genau die Kommutativität ist.

21. Korollar

Ist G eine quasiprimitive Gruppe, so liegt jeder auflösbare Subnormalteiler von G in $Z(G)$, und $G/Z(G)$ enthält keinen auflösbaren echten Subnormalteiler.

Beweis:

Zunächst ist wegen Korollar 18 jeder Subnormalteiler in G normal. Sei also $N \trianglelefteq G$ auflösbar. Dann ist N nach Korollar 19 und Lemma 20 abelsch. Mithin ist jedes Element von N unter N, also nach Satz 17 auch unter G, nur zu sich selbst konjugiert. Das heißt aber gerade $N \trianglelefteq Z(G)$.

Nach Korollar 19 hat auch $G/Z(G)$ nur quasiprimitive irreduzible Charaktere, so daß jeder Subnormalteiler laut Korollar 18 normal ist. Einem auflösbaren Normalteiler $N/Z(G) \trianglelefteq G/Z(G)$ entspricht aber ein (ebenfalls auflösbarer) Normalteiler N mit $Z(G) \trianglelefteq N \trianglelefteq G$ von G. Wie eben gezeigt, gilt dann $N \trianglelefteq Z(G)$, also $N = Z(G)$.

q.e.d.

22. Lemma
Ist eine Gruppe G quasiprimitiv, so ist $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren.

Beweis:
Sei G ein minimales Gegenbeispiel.

1. Fall: $Z(G) \neq 1$

In diesem Fall ist $|G/Z(G)| < |G|$, so daß wegen der Minimalität von G und Korollar 19 die Gruppe $(G/Z(G))/Z(G/Z(G))$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist. Aus Korollar 21 folgt aber $Z(G/Z(G)) = 1$, also

$$(G/Z(G))/Z(G/Z(G)) \cong G/Z(G),$$

so daß damit schon $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren wäre – im Widerspruch zur Wahl von G als Gegenbeispiel.

2. Fall: $Z(G) = 1$

Sei nun N ein minimaler (also wegen Korollar 18 einfacher) Normalteiler von G. Laut Satz 17 bewirken alle Elemente von G via Konjugation klassenerhaltende Automorphismen auf N, nach Satz 5 also innere. Offensichtlich sind alle Elemente von G, die auf N lediglich innere Automorphismen hervorrufen, in $NC_G(N)$ enthalten. Das ergibt $G = NC_G(N)$ und natürlich ist $C_G(N) \trianglelefteq G$. Des weiteren gilt $N \cap C_G(N) = Z(N) = 1$ wegen Korollar 21 und $Z(G) = 1$. Damit haben wir

$$G = N \times C_G(N). \tag{ix}$$

Außerdem ist natürlich $|C_G(N)| < |G|$ und $Z(C_G(N)) = 1$, wiederum wegen Korollar 21 und $Z(G) = 1$. Weil überdies nach Korollar 19 $C_G(N)$ quasiprimitiv ist, folgt aus der Minimalität von G, daß $C_G(N)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist.
Mit (ix) folgt daraus aber, daß auch G vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist.

Daher gibt es insgesamt keine kleinste, also überhaupt keine endliche Gruppe, für die die Aussage des Lemmas nicht gilt.

q.e.d.

23. Proposition
Ist für eine Gruppe G die Faktorgruppe $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren, so sind G' und $G/Z(G)$ perfekt, und es ist $G = G'Z(G)$. Die Eigenschaft, daß $N/Z(N)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist, überträgt sich auf alle Normalteiler $N \trianglelefteq G$.

Beweis:
Für abelsche Gruppen G ist nichts zu beweisen.
Sei also G nichtabelsch und $G/Z(G)$ direktes Produkt nichtabelsch einfacher, also jedenfalls perfekter Gruppen. Die Kommutatorgruppe eines direkten Produktes ist aber gleich dem direkten Produkt der Kommutatorgruppen. Folglich ist $G/Z(G)$ perfekt.
Stets ist $(G/Z(G))' = G'Z(G)/Z(G)$. Mit der Perfektheit von $G/Z(G)$ folgt daraus $G/Z(G) = G'Z(G)/Z(G)$, also $G = G'Z(G)$. Das ergibt weiter

$$G' = (G'Z(G))' = G'' ,$$

so daß auch G' perfekt ist.
Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ haben wir

$$NZ(G)/Z(G) \cong N/(Z(G) \cap N) \qquad \text{(x)}$$

Nun ist $Z(N)Z(G)/Z(G)$ zweifellos auflösbar, andrerseits direkter Faktor der perfekten Gruppe $G/Z(G)$. Darum kann nur $Z(N)Z(G) = Z(G)$, also $Z(N) \leq Z(G)$ sein. Das ergibt $Z(N) = N \cap Z(G)$. Zusammen mit (x) erhalten wir

$$N/Z(N) \cong NZ(G)/Z(G) \qquad \text{(xi)}$$

Als direkter Faktor der vollständig reduziblen Gruppe $G/Z(G)$ ist aber $NZ(G)/Z(G)$ und damit nach (xi) auch $N/Z(N)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren.

q.e.d.

24. Lemma
Ist für eine Gruppe G die Faktorgruppe $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren, so ist G ein direktes Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen.

Beweis:
Sei $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren:

$$G/Z(G) = G_1/Z(G) \times \cdots \times G_n/Z(G) \qquad \text{(xii)}$$

Wir haben nur zu zeigen, daß dabei jeder quasieinfache Normalteiler G_i mit jeder anderen Komponente G_j elementweise vertauschbar ist. Da für $n = 1$ nichts zu

beweisen ist, sei fortan $n \geq 2$.
Wir wählen G_1 aus und bezeichnen $\langle G_2, ..., G_n \rangle =: M$. Nach Proposition 23 gilt

$$M = M'Z(M),\ G_1 = G_1'Z(G_1),$$

wobei unserer Voraussetzung gemäß sicher $Z(G_1) = Z(M) = Z(G)$ ist, also

$$M = M'Z(G),\ G_1 = G_1'Z(G).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} [G_1, M] &= [G_1'Z(G), M'Z(G)] \\ [G_1, M] &= [G_1', M'] \end{aligned}$$

Nun besagt (xii), daß $[G_1', M'] \leq Z(G)$ gilt, woraus wiederum

$$[[G_1', M'], M'] = 1 \qquad \text{(xiii)}$$

folgt. Natürlich ist $[G_1', M'] = [M', G_1']$, also nach (xiii)

$$[[M', G_1'], M'] = [[G_1', M'], M'] = 1 \qquad \text{(xiv)}$$

woraus mit Lemma 13

$$[[M', M'], G_1'] = 1$$

folgt. Nach Proposition 23 ist aber M' perfekt, also $[M', M'] = M'$, so daß wir

$$[M, G_1] = [M', G_1'] = 1$$

haben. Also ist G_1 elementweise mit M vertauschbar und G ist somit das direkte Produkt mit vereinigten Zentren der quasieinfachen Gruppen G_i.

q.e.d.

25. Hauptsatz
Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt mit vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen ist.

Beweis:
Sei zunächst G das direkte Produkt mit vereinigten Zentren der quasieinfachen Gruppen $G_1, ..., G_n$. Insbesondere ist dann $G/Z(G)$ vollständig reduzibel.
Ist N ein beliebiger Normalteiler von G, so ist entweder $N \leq Z(G)$, $NZ(G) = G$ oder $NZ(G)$ ein echter Normalteiler von G. In den ersten beiden Fällen ist klar, daß G auf N keine anderen Konjugationen bewirkt als N selbst. Ist $NZ(G)$ ein echter Normalteiler von G, so muß $NZ(G)$ in G direkter Faktor bei vereinigten Zentren sein. Mithin ist $NZ(G)$, also auch N konjugationsautonom in G. Da dies

für alle Normalteiler von G zutrifft, ist G nach Satz 17 quasiprimitiv.

Sei nun G quasiprimitiv.
Laut Lemma 22 ist dann $G/Z(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren. Lemma 24 sichert dann, daß G direktes Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen ist.

q.e.d.

Aus dieser Charakterisierung folgt unmittelbar

26. Korollar
Das direkte Produkt $G_1 \times G_2$ zweier Gruppen ist genau dann quasiprimitiv, wenn G_1 und G_2 quasiprimitiv sind.

Beweis:
Ist $G_1 \times G_2$ quasiprimitiv, so sind es G_1 und G_2 laut Korollar 19 ebenfalls. Sind umgekehrt G_1 und G_2 quasiprimitiv, so sind sie nach Satz 25 direkte Produkte bei vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen. Nun ist $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$, so daß $(G_1 \times G_2)/Z(G_1 \times G_2)$ wiederum vollständig reduzibel ist, und die den Faktoren entsprechenden Normalteiler von $G_1 \times G_2$ elementweise miteinander vertauschbar sind.

q.e.d.

4 Modifikationen

4.1 Charakteristische Quasiprimitivität

Korollar 18 sichert die Transitivität der Normalteilerrelation in quasiprimitiven Gruppen. Das legt den Gedanken nahe, den Begriff der Quasiprimitivität dadurch abzuschwächen, daß die Forderung hinsichtlich der Einschränkung der irreduziblen Charaktere einer Gruppe G nur auf charakteristische Untergruppen statt auf alle Normalteiler von G bezogen wird. Dies bietet sich insofern an, als die Relation, charakteristische Untergruppe zu sein, ohnehin transitiv im Sinne von Korollar 18 ist, so daß eine Aussage über den homogenen Zerfall der Gruppencharaktere in dieser Hinsicht keine Wirkung mehr erzielt.

27. Definition
Eine Gruppe G, deren irreduzible Charaktere über allen charakteristischen Untergruppen von G sämtlich homogen zerfallen, heiße **charakteristisch-quasiprimitiv**.

Da charakteristische Untergruppen natürlich Normalteiler sind, folgt aus Satz 15 wie bei normaler Quasiprimitivität:

28. Satz
Eine Gruppe G ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn alle charakteristischen Untergruppen von G konjugationsautonom in G sind.

Klar ist analog Korollar 19 auch

29. Korollar
Ist G eine charakteristisch-quasiprimitive Gruppe und U eine charakteristische Untergruppe von G, so sind U und G/U ebenfalls charakteristisch-quasiprimitiv.

Charakteristisch einfache Gruppen sind in ebenso trivialer Weise charakteristisch-quasiprimitiv, wie einfache Gruppen quasiprimitiv sind. Als direktes Produkt isomorpher einfacher Gruppen ist eine charakteristisch einfache auflösbare Gruppe ebenso notwendig abelsch wie eine einfache auflösbare. Allgemein jedoch reicht charakteristische im Gegensatz zur normalen Quasiprimitivität nicht aus, um aus der Auflösbarkeit gleich die Kommutativität abzuleiten, wie das Beispiel der Quaternionengruppe Q lehrt, über deren einziger charakteristischer Untergruppe $Z(Q) = Q'$ zweifellos jeder irreduzible Charakter von Q homogen zerfällt, wie man entsprechend Satz 28 leicht einsieht. Immerhin gilt aber:

30. Lemma
Ist eine Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv und auflösbar, so liegt ihre Kommutatorgruppe im Zentrum.

Beweis:
Die auflösbare Gruppe G sei genau n-stufig metabelsch. Dann ist $G^{(n-1)}$ abelsch, liegt also, wie Satz 28 lehrt, im Zentrum $Z^1(G)$. Nehmen wir an, für ein $k \geq 1$ gelte

$$G^{(n-k)} \leq Z^k(G),$$

wobei $Z^k(G)$ das k-te Glied der aufsteigenden Zentralfolge bezeichnen möge. Da die Faktorgruppe $G/G^{(n-k)}$ nur noch $(n-k)$-stufig metabelsch ist, ist $(G/G^{(n-k)})^{(n-(k+1))} = G^{(n-(k+1))}/G^{(n-k)}$ abelsch. Als charakteristische Untergruppe der laut Korollar 29 charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe $G/G^{(n-k)}$ liegt $G^{(n-(k+1))}/G^{(n-k)}$ daher wegen Satz 28 im Zentrum $Z(G/G^{(n-k)})$, also ist $G^{(n-(k+1))}$ modulo $G^{(n-k)}$ mit allen $g \in G$ elementweise vertauschbar – erst recht daher modulo $Z^k(G)$. Das ergibt aber $G^{(n-(k+1))}Z^k(G)/Z^k(G) \leq Z(G/Z^k(G)) = Z^{k+1}(G)/Z^k(G)$, also

$$G^{(n-(k+1))} \leq Z^{k+1}(G)$$

Folglich können wir aus der anfangs erhaltenen Relation $G^{(n-1)} \leq Z^1(G)$ induktiv auf $G \leq Z^n(G)$ schließen. Das besagt, daß G nilpotent und die Nilpotenzklasse c von G jedenfalls nicht größer als n ist:

$$c \leq n \tag{xv}$$

Andrerseits gilt generell in nilpotenten Gruppen (siehe z.B. [12], Kap.9)

$$2^{n-1} \leq c \tag{xvi}$$

Aus (xv) und (xvi) folgt sofort $2^{n-1} \leq n$, was nur für $n \leq 2$ möglich ist. Mit (xv) heißt das gerade $c \leq 2$.
Für $c = 1$ ist G natürlich abelsch, und für $c = 2$ liegt wie behauptet G' im Zentrum.

q.e.d.

Bemerkung: Es fällt auf, daß die charakteristischen Untergruppen, auf deren zentraler Lage der Beweis beruht, nämlich die höheren Kommutatorgruppen, sogar vollinvariant sind. Die Aussage des Lemmas bleibt also bestehen, wenn statt charakteristischer Quasiprimitivität lediglich der homogene Zerfall aller irreduziblen Charaktere auf den vollinvarianten Untergruppen vorausgesetzt wird.

31. Korollar
Jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe mit $p \neq 2$ ist regulär.

Beweis:
Nach [8] Satz III.10.2 ist eine p-Gruppe regulär, wenn ihre Nilpotenzklasse kleiner als p ist. Wegen $2 < p$ sichert das gerade Lemma 30.

q.e.d.

32. Korollar
Ist G eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe, so ist G' elementarabelsch. Insbesondere gilt $\Phi(G) \leq Z(G)$.

Beweis:
Nach Lemma 30 ist G' jedenfalls abelsch.
Angenommen, es sei $exp(G') = p^n$ mit $n > 1$.
Wir betrachten die charakteristische Untergruppe $\mho_{n-1}(G) = \langle g^{p^{n-1}} | g \in G \rangle$. Für zwei Elemente u, v von G finden wir mit Lemma 8

$$\begin{aligned} [u^{p^{n-1}}, v^{p^{n-1}}] &= [u, v^{p^{n-1}}]^{p^{n-1}} \\ &= [u, v]^{p^{2n-2}} = 1 \end{aligned}$$

da $2n - 2 \geq n$ für $n > 1$ gilt.
Da diese p^{n-1}-ten Potenzen $\mho_{n-1}(G)$ erzeugen, ist $\mho_{n-1}(G)$ abelsch und liegt folglich in $Z(G)$. Daraus entnehmen wir wiederum mit Lemma 8

$$\begin{aligned} \forall g, h \in G : \quad [g, h]^{p^{n-1}} &= [g^{p^{n-1}}, h] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das bedeutet im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $exp(G') \leq p^{n-1}$ gilt. Daher muß $n = 1$ sein, so daß G' tatsächlich elementarabelsch ist. Mit Lemma 8 finden wir daher

$$\begin{aligned} \forall x, y \in G: \qquad & [x^p, y] = [x, y]^p = 1 \\ \Longrightarrow\ & x^p \in Z(G) \\ \Longrightarrow\ & \mho_1(G) \leq Z(G), \end{aligned}$$

so daß mit Lemma 30 zusammen sogleich $\Phi(G) = \mho_1(G)G' \leq Z(G)$ folgt.
q.e.d.

33. Korollar
Jeder auflösbare Normalteiler einer charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe liegt in $Z^2(G)$ und $G/Z^2(G)$ enthält keinen nichttrivialen auflösbaren Normalteiler.

Beweis:
Sei $N \trianglelefteq G$ charakteristisch und auflösbar. Dann ist N zunächst natürlich charakteristisch - quasiprimitiv, so daß nach Lemma 30 sogleich $Z^2(N) = N$ folgt. Mit N ist auch $Z(N)$ charakteristisch in G, überdies abelsch, so daß

$$Z(N) \leq Z(G) \tag{xvii}$$

folgt. Nun ist ([11], Lemma 2.22) jeder irreduzible Charakter von $G/Z(N)$ ein irreduzibler Charakter von G, in dessen Kern $Z(N)$ liegt. Als solcher zerfällt er wegen der charakteristischen Quasiprimitivität von G homogen über N, und zwar als Vielfaches eines irreduziblen Charakters von N, in dessen Kern $Z(N)$ liegt. Mithin zerfällt jeder irreduzible Charakter von $G/Z(N)$ homogen über $N/Z(N)$. Nach Clifford und Frobenius folgt (wie bereits bei Satz 17 angewandt), daß jeder irreduzible Charakter von $N/Z(N)$ unter $G/Z(N)$ nur zu sich selbst konjugiert ist. Mit dem Brauerschen Permutationslemma ergibt das auch hier, daß jede Klasse von $N/Z(N)$ auch eine $G/Z(N)$-Klasse ist. Nun ist aber $N/Z(N)$ abelsch, $G/Z(N)$ natürlich charakteristisch-quasiprimitiv, so daß wir

$$N/Z(N) \leq Z(G/Z(N)) \tag{xviii}$$

erhalten. Ist $Z(G/Z(N)) = Z^*/Z(N)$, so haben wir also $N \trianglelefteq Z^*$. Anders ausgedrückt ist freilich

$$Z^* = \{z^* \in G | \forall g \in G : [z^*, g] \in Z(N)\} \subseteq \{z \in G | \forall g \in G : [z, g] \in Z(G)\} = Z^2(G)$$

und folglich $N \leq Z^2(G)$.
Ist nun $M \trianglelefteq G$ ein nicht notwendig charakteristischer auflösbarer Normalteiler von G, so ist immerhin $\langle M^\alpha | \ \alpha \in Aut(G)\rangle$ charakteristisch, als Produkt auflösbarer Normalteiler auflösbar, und liegt daher nach obigen Folgerungen in $Z^2(G)$.

Ist ferner $H/Z^2(G)$ ein auflösbarer Normalteiler von $G/Z^2(G)$, so ist H ein auflösbarer Normalteiler von G, und liegt daher in $Z^2(G)$.

q.e.d.

Insbesondere entnehmen wir daraus, daß $Z^2(G)$ schon das Hyperzentrum von G ist, da jedes Glied der aufsteigenden Zentralreihe zweifellos auflösbar ist.

34. Lemma

Ist eine Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, so ist $G/Z^2(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren.

Beweis:

Sei G ein minimales Gegenbeispiel.

1. Fall: $Z^2(G) \neq 1$

In diesem Fall ist $|G/Z^2(G)| < |G|$, so daß wegen der Minimalität von G die Gruppe

$$\frac{G/Z^2(G)}{Z^2(G/Z^2(G))}$$

vollständig reduzibel ist. Nun ist $Z^2(G/Z^2(G))$ zweifellos auflösbar, also nach Korollar 33 trivial. Daher ist

$$\frac{G/Z^2(G)}{Z^2(G/Z^2(G))} \cong G/Z^2(G) \ ,$$

so daß damit auch $G/Z^2(G)$ vollständig reduzibel ist.

2. Fall: $Z^2(G) = 1$

Sei N eine minimale (also charakteristisch einfache) charakteristische Untergruppe von G. Gemäß Satz 28 bewirken alle Elemente von G per Konjugation klassenerhaltende Automorphismen auf N, nach Korollar 6 also innere. Wiederum sind alle Elemente von G, die auf N nur innere Automorphismen bewirken, in $NC_G(N)$ enthalten. Daher ist $G = NC_G(N)$, und natürlich ist dann $C_G(N)$ charakteristisch in G. Außerdem gilt mit Korollar 33

$$N \cap C_G(N) = Z(N) \leq Z^2(N) \leq Z^2(G) = 1 \ .$$

Das ergibt

$$G = N \times C_G(N) \ . \qquad \text{(xix)}$$

Zudem ist sicher $|C_G(N)| < |G|$, nach Korollar 33 $Z^2(C_G(N)) \leq Z^2(G) = 1$ und $C_G(N)$ ist charakteristisch - quasiprimitiv. Wegen der Minimalität von G ist daher $C_G(N)$ vollständig reduzibel. Eingedenk des Umstandes, daß die charakteristisch einfache Gruppe N vollständig reduzibel ist, folgt damit aus (xix), daß G vollständig reduzibel ist.

Daß in jedem Fall alle betrachteten direkten Faktoren nichtabelsch sind, folgt aus Korollar 33, da das direkte Produkt aller abelschen direkten Faktoren charakteristisch, aber auch abelsch in $G/Z^2(G)$ wäre.
Somit existiert keine kleinste, also überhaupt keine endliche Gruppe, für die die Behauptung des Lemmas nicht gilt.

q.e.d.

35. Korollar
Ist eine Gruppe G charakteristisch – quasiprimitiv, so ist die Faktorgruppe $G/Z(G)$ quasiprimitiv.

Beweis:
Setzen wir $\tilde{G} := G/Z(G)$, so folgt aus Lemma 34, daß $\tilde{G}/Z(\tilde{G})$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist. Nach Lemma 24 ist nun $\tilde{G}$ direktes Produkt mit vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen, und somit nach Satz 25 quasiprimitiv.

q.e.d.

Es sei bemerkt, daß die Umkehrung von Lemma 30 – anders als bei Lemma 20 – nicht gilt, wie schon die Existenz von Gruppen der Ordnung p^3, die nicht charakteristisch-quasiprimitiv sind, beweisen wird. Wir wissen aber, daß eine Gruppe G genau dann nilpotent ist, wenn sie das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen ist. Diese sind in G die jeweils einzigen Untergruppen ihrer Ordnung und darum charakteristisch. Ist eine nilpotente Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, sind es also auch alle Sylowgruppen von G. Sind umgekehrt alle Sylowgruppen der nilpotenten Gruppe G charakteristisch-quasiprimitiv, so ist es auch G selbst. Ist nämlich N eine charakteristische Untergruppe von G, so ist N ebenfalls nilpotent, also das direkte Produkt seiner Sylowgruppen, welche in den Sylowgruppen von G enthalten sind. Jede Sylowgruppe P_1 von N ist in der zugehörigen Sylowgruppe P von G sogar charakteristisch, weil N charakteristisch in G, und die Automorphismengruppe von G das direkte Produkt der Automorphismengruppen der Sylowgruppen von G ist. Daher bewirkt P, also auch G keine anderen Konjugationen in P_1 als P_1 selbst. Da N direktes Produkt seiner Sylowgruppen ist, bewirkt folglich G in N keine anderen Konjugationen als N selbst.
Das ergibt:

36. Lemma

Eine auflösbare Gruppe G ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie nilpotent ist, und alle ihre Sylowgruppen charakteristisch-quasiprimitiv sind. Ihre Nilpotenzklasse ist dann höchstens 2.

Es kommt also darauf an, charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppen zu erkennen und möglichst zu klassifizieren.

37. Proposition

Ist die Gruppe G ein direktes Produkt einer charakteristisch-quasiprimitiven Gruppe und einer abelschen Gruppe, so ist G charakteristisch-quasiprimitiv.

Beweis:

Sei $G = P \times A$, wobei P charakteristisch-quasiprimitiv und A abelsch ist. Zwei Elemente einer charakteristischen Untergruppe U von P sind genau dann in G konjugiert, wenn sie es in U sind. Eine charakteristische Untergruppe von G hat nun in P zweifellos eine charakteristische Projektion. Da alle Komponenten aus A bei dieser Konstruktion via Konjugation wirkungslos bleiben, wirken überhaupt höchstens die P-Komponenten eines Elementes aus G nichttrivial - dann aber genau auf die P-Spur, so daß sich wiederum in der zugrundegelegten charakteristischen Untergruppe ein Element findet, das gleichartig wie ein beliebig gegebenes Element von G wirkt.

q.e.d.

38. Satz

Eine p-Gruppe G mit $|G'| = p > 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p$$

in der Notation nach Satz 10 ist.

Eine 2-Gruppe G mit $|G'| = 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ

$$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \\ m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2 \text{ oder vom Typ } \begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_2$$

ist, wobei im letzten Fall bei $d = 1$ entweder für keinen oder für mindestens zwei Indizes i gilt $m_i = 1$.

Beweis:

Sei G eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe mit $|G'| = p$.

Zunächst denken wir uns G als direktes Produkt direkt unzerlegbarer Untergruppen zerlegt. Von diesen ist wegen der Einfachheit von G' genau eine nichtabelsch.

Proposition 37 sichert, daß G charakteristisch-quasiprimitiv ist, sofern es dieser nichtabelsche direkte Faktor ist. Für den umgekehrten Fall, daß der nichtabelsche direkte Faktor nicht charakteristisch-quasiprimitiv ist, wird deutlich werden, daß die zum Beweis dessen unternommenen Betrachtungen vom eventuell vorhandenen abelschen direkten Faktor nicht gehindert werden. Wir wollen daher G für den nichtabelschen direkten Faktor nehmen.
Angenommen, G sei vom Typ I, II oder III gemäß Satz 10, und es sei nicht

$$m_i = n_i; \forall i = 1, ..., t \ .$$

Sei etwa[2] $m_i > n_i$ für ein i, $1 \leq i \leq t$. Wir werden zeigen, daß dann kein Element der charakteristischen Untergruppe $\Omega_{n_i}(G)$ eine nichtzentrale Potenz von a_i enthält. Für $p > 2$ folgt das unmittelbar aus der mit Korollar 31 gesicherten Regularität von G. Für $p = 2$ sehen wir es folgendermaßen ein:

Angenommen, es gäbe ein solches Element in $\Omega_{n_i}(G)$. Da die Elemente der Ordnung 2^{n_i} $\Omega_{n_i}(G)$ erzeugen, gibt es dann auch ein $x \in G$ mit $x^{2^{n_i}} = 1$ und

$$x = (\prod_{j=1}^{t} a_j^{k_j} b_j^{l_j}) y^v \ ,$$

wobei $2 \not| k_i$ gilt und y bei Typ I das kommutatorerzeugende Element und ansonsten gleich 1 sein soll. Wir berechnen

$$1 = x^{2^{n_i}} = (\prod_{j=1}^{t} a_j^{2^{n_i} k_j} b_j^{2^{n_i} l_j}) y^{2^{n_i} v} c^s \ , \tag{xx}$$

wobei c der Kommutator von G und $s = \sum k_j l_j 2^{n_i - 1}(2^{n_i} - 1)$ ist. Für $n_i \geq 2$ folgt sofort $2|s$, mithin $1 = (\prod a_j^{2^{n_i} k_j} b_j^{2^{n_i} l_j}) y^{2^{n_i} v}$, also auch $a_i^{2^{n_i} k_i} = 1$ bei $2 \not| k_i$, was ein Widerspruch zur Annahme $m_i > n_i$ wäre. Bleibt also nur $n_i = 1$. Damit haben wir aus (xx)

$$1 = x^2 = (\prod_{j=1}^{t} a_j^{2k_j} b_j^{2l_j}) y^{2v} c^s \tag{xxi}$$

mit $s = \sum k_j l_j$ und notwendig $2 \not| s$, da sonst derselbe Widerspruch folgte. Für Typ I folgt daraus wieder sofort $a_i^{2k_i} = 1$ bei $2 \not| k_i$, also $m_i = 1$ im Widerspruch zu $m_i > n_i$.
Für Typ II folgt bei $m_i > n_i$ jedenfalls $a_j^{2k_j} = b_j^{2l_j} = 1$ für $j = 1, ..., t-1$ und daher $a_t^{2k_t} b_t^{2l_t} = c$. Nun ist aber $n_t = 1$, somit $b_t^{2l_t} = 1$ und darum $a_t^{2k_t} = c$ im Widerspruch zum Klassifikationstyp nach Satz 10. Bei gleicher Vorgehensweise

[2] Außer bei Typ II mit $i = t$ können wir das o.B.d.A. annehmen. Für Typ II wird der Fall $i = t$ gesondert behandelt.

für $n_i > m_i$ haben wir $m_i = 1$ und dann $a_t^{2k_t} b_t^{2l_t} = c$, somit – wegen des Typus von G – $b^{2l_t} = c$ bei $2 \not| l_t$. Daraus folgt wiederum wegen des Typus von G sogleich $n_t = 2$. Laut Satz 11 ist dann aber G isomorph zu einer Gruppe vom Typ I.
Für Typ III ist $m_t = n_t$ vorgegeben und aus (xxi) folgt $a_i^{2k_i} = 1$ bei $2 \not| k_i$, also $m_i = 1$ im Widerspruch zu $m_i > n_i \geq 1$.
Somit enthält tatsächlich kein Element von $\Omega_{n_i}(G)$ eine nichtzentrale Potenz von a_i. Da b_i mit allen anderen Erzeugenden ohnedies kommutiert, liegt b_i in $Z(\Omega_{n_i})$, aber sichtlich nicht in $Z(G)$. Das widerspricht der charakteristischen Quasiprimitivität von G. Daher kann $m_i > n_i$ (und analog $n_i > m_i$) nicht auftreten und wir finden stets $m_i = n_i$, $i = 1...t$.
Überdies kann G - außer mit der in Satz 11 angegebenen Isomorphie zu Typ I - nicht vom Typ II sein:
Wir zeigen, daß die minimale b_t enthaltende charakteristische Untergruppe $B := \langle b_t \rangle_{Aut(G)}$ keine Elemente enthält, in deren Darstellung als Produkt der Erzeugenden a_i, b_i eine nichtzentrale Potenz von a_t auftritt, so daß b_t in $Z(B)$ liegt, ohne jedoch zentral in G zu liegen. Ist nämlich $\alpha \in Aut(G)$, so muß $\alpha(b_t)^{p^{m_t-1}} = c^l$ mit $c := b^{p^{m_t-1}}$ und $1 \leq l < p$ sein. Wäre nun $\alpha(b_t) = b_t^j a_t^k$ mit $p \not| k$, so folgte[3]

$$
\begin{aligned}
(b_t^j a_t^k)^{p^{m_t-1}} &= \underbrace{b_t^j a_t^k \cdots b_t^j a_t^k}_{(p^{m_t-1})\times} \\
&= b_t^{2j} a_t^{2k} \underbrace{b_t^j a_t^k \cdots b_t^j a_t^k}_{(p^{m_t-1}-2)\times} c^{jk} \\
&= b_t^{jp^{m_t-1}} a_t^{kp^{m_t-1}} c^s \\
\text{mit } s &= jk \sum_{v=1}^{p^{m_t-1}-1} v \\
&= jkp^{m_t-1} \frac{p^{m_t-1}-1}{2}, \text{ also} \\
\text{wegen } m_t \geq 2 \quad \text{und} \quad & b_t^{p^{m_t-1}} = c \\
(b_t^j a_t^k)^{p^{m_t-1}} &= c^{j+s} a_t^{kp^{m_t-1}} \notin \langle c \rangle
\end{aligned}
$$

weil $ord(a_t) = p^{m_t}$ ist. Tatsächlich gilt damit $a_t^k z \notin B$ für $p \not| k$ und $z \in C_G(b_t)$.

Wir wollen nun noch zeigen, daß eine 2-Gruppe des Typs I, in der zwar $m_i = n_i; \forall i$ gilt, aber $m_{i_o} = n_{i_0} = 1$ genau einmal auftritt und $d = 1$ gilt, nicht charakteristisch - quasiprimitiv sein kann.
Dazu sei G eine solche Gruppe, und o.B.d.A. $m_1 = 1$.
Wir betrachten die minimale $a_1 b_1$ enthaltende charakteristische Untergruppe $U :=$

[3]Etwaige weitere Faktoren in $\alpha(b_t)$ kommutieren mit a_t und b_t, ändern daher jedenfalls nichts daran, daß am Schluß der Rechnung eine nichttriviale Potenz von a_t auftritt.

$\langle a_1 b_1 \rangle_{Aut(G)}$ von G. Ist $\alpha \in Aut(G)$, so sind auch

$$\alpha(a_1) \;=\; a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} c^h \qquad \text{(xxii)}$$
$$\alpha(b_1) \;=\; a_1^{e'_1} b_1^{f'_1} \cdots a_k^{e'_k} b_k^{f'_k} c^{h'} \qquad \text{(xxiii)}$$

nichtzentrale Elemente der Ordnung 2. Da a_1, b_1 die einzigen Erzeugenden der Ordnung 2 (in der Darstellung gemäß Satz 10) sind, gilt für $i > 1$

$$\begin{aligned} (a_i^{e_i} b_i^{f_i})^2 &= a_i^{e_i} b_i^{f_i} a_i^{e_i} b_i^{f_i} \\ &= a_i^{2e_i} b_i^{2f_i} c^{e_i f_i}; \qquad \text{mit } c := [a_i, b_i] \\ &\neq 1; \qquad \text{sofern } 2^{m_i - 1} \not| \, e_i \text{ oder } 2^{m_i - 1} \not| \, f_i, \end{aligned}$$

so daß $e_i, f_i \in \{0, 2^{m_i-1}\}$ folgt. Mithin liegen die in (xxii) auftretenden Potenzen von $a_i, b_i, i > 1$ zentral. Da jedoch $\alpha(a_1), \alpha(b_1)$ nichtzentrale Elemete sind, kann nicht $e_1 = f_1 = 0$ gelten. Ebensowenig ist $e_1 = f_1 = 1$ möglich, da sonst $\alpha(a_1)$ die Ordnung 4 hätte. Folglich gilt $e_1 = 1, f_1 = 0$ oder $e_1 = 0, f_1 = 1$, und dual dazu wegen der Nichtvertauschbarkeit von $\alpha(a_1)$ und $\alpha(b_1)$ folgt $e'_1 = 0, f'_1 = 1$ bzw. $e'_1 = 1, f'_1 = 0$. Jedenfalls haben wir damit

$$\alpha(a_1 b_1) = a_1 b_1 z; \qquad \text{mit } z \in Z(G)$$

Dieses lehrt, daß alle Bilder von $a_1 b_1$ unter G-Automorphismen mit $a_1 b_1$ kommutieren. Daher ist $U = \langle a_1 b_1 \rangle_{Aut(G)}$ abelsch, liegt aber ganz offenbar nicht in $Z(G)$. Somit ist G nicht charakteristisch-quasiprimitiv.

Sei nun umgekehrt G eine p-Gruppe von der im Satz angegebenen Art mit $p \neq 2$, und sei U eine charakteristische Untergruppe von G. Liegt U zentral in G, besteht kein Problem. Gibt es aber ein $x \in U \backslash Z(G)$, so kann x jedenfalls nicht Produkt von p-ten Potenzen der Erzeugenden a_i, b_i sein. Gegebenenfalls durch Umordnung der Erzeugenden finden wir daher

$$x = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} z \;,\; k \geq 1 \qquad \text{(xxiv)}$$

mit $0 \leq e_i, f_j < p$; $e_i + f_i \geq 1$ und $z \in \mho_1(G) G' \leq Z(G)$.
Sei nun o.B.d.A. $e_1 \neq 0$. Wir betrachten die Abbildung

$$\left.\begin{array}{rclcrcl} \sigma(a_1) &=& a_1^2; & \qquad & \sigma(a_i) &=& a_i \\ \sigma(b_1) &=& b_1^{\frac{p+1}{2}}; & & \sigma(b_i) &=& b_i \end{array}\right\} \text{für } i \neq 1$$

und finden mit $p \neq 2$

$$ord(\sigma(a_1)) = \; m_1 \; = ord(\sigma(b_1))$$
$$\text{sowie} \qquad [\sigma(a_1), \sigma(b_1)] = [a_1^2, b_1^{\frac{p+1}{2}}] = [a_1, b_1]$$

woraus wir entnehmen, daß die Elemente $\sigma(a_i), \sigma(b_i)$ für $i = 1, ..., t$ wiederum alle definierenden Relationen von G gemäß Satz 10 erfüllen, und natürlich erzeugen sie G. Wir schließen, daß σ einen Automorphismus bestimmt. Damit liegt $\sigma(x)$ ebenfalls in U, also haben wir auch

$$\sigma(x)x^{-1} = a_1^{e_1} b_1^{\frac{p-1}{2} f_1} z' \in UZ(G)$$

mit $z' \in Z(G)$. Nun liefert auch die Abbildung τ mit

$$\begin{array}{rcl} \tau(a_1) & = & a_1^{e_1} b_1^{\frac{p-1}{2} f_1}; \\ \tau(b_1) & = & b_1^{e_1^{-1}}; \\ \text{mit } e_1^{-1} e_1 & \equiv & 1 \ mod(p) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} \tau(a_i) & = & a_i \\ \tau(b_i) & = & b_i \end{array}\right\} \text{ für } i \neq 1$$

einen Automorphismus von G, da $ord(\tau(a_1)) = ord(\tau(b_1)) = p^{m_1}$ wegen $ord(b_1) = ord(a_1)$ und trivialerweise $[\tau(a_1), \tau(b_1)] = c$ gilt. Damit haben wir dann auch $\tau^{-1}(\sigma(x)x^{-1}) = a_1 \tau^{-1}(z') \in U$, also auch $a_1 \in UZ(G)$. Weiterhin liefert die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} a_{i_0} & \mapsto & b_{i_0}^{-1}; \\ b_{i_0} & \mapsto & a_{i_0}; \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_j \\ b_j & \mapsto & b_j \end{array}\right\} \text{ für } j \neq i_0$$

bei Typ I stets einen Automorphismus von G, da wir $m_{i_0} = n_{i_0}$ haben. Folglich liegt auch b_1 in $UZ(G)$. Ganz analog liegen folglich alle in x nichtzentral auftretenden Erzeugenden a_i, b_i und ihre zugehörigen nichtkommutierenden Erzeugenden mit $1 \leq i \leq k$ in $UZ(G)$. Da nur diese via Konjugation nichttrivial auf x wirken, ist folglich jedes G-Konjugierte von x bereits in $UZ(G)$, also auch in U konjugiert zu x. Da dieses für alle charakteristischen Untergruppen U und alle Elemente $x \in U$ gilt, ist G nach Satz 28 charakteristisch-quasiprimitiv.

Sei nun G eine 2-Gruppe vom Typ I oder III, mit $m_i = 1$ für kein oder für mindestens zwei Indizes i. Sei ferner U eine charakteristische Untergruppe von G. Liegt U in $Z(G)$, ist nichts zu zeigen. Ansonsten betrachten wir wiederum $x \in U \backslash Z(G)$ und finden wiederum gegebenenfalls nach Umordnung der Erzeugenden

$$x = a_1^{e_1} b_1^{f_1} \cdots a_k^{e_k} b_k^{f_k} z \ ; \ k \geq 1 \tag{xxv}$$

mit $e_i, f_j \in \{0, 1\}$, $e_i + f_i \geq 1; i = 1...k$ und $z \in Z(G)$.
Sei zunächst $m_1 \geq 2$ und dabei o.B.d.A. $e_1 = 1$. Wir betrachten die Abbildung

$$\sigma: \quad \begin{array}{rcl} a_1 & \mapsto & a_1 b_1; \\ b_1 & \mapsto & b_1; \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & a_i \\ b_i & \mapsto & b_i \end{array}\right\} \text{ für } i \neq 1$$

und erhalten wegen $m_1 \geq 2$

$$\begin{array}{rcl} \sigma(a_1)^{2^{m_1}} & = & (a_1 b_1)^{2^{m_1}} = \left((a_1 b_1)^2\right)^{2^{m_1 - 1}} \\ & = & (a_1^2 b_1^2 c)^{2^{m_1 - 1}} = a_1^{2^{m_1}} b_1^{2^{m_1}} \\ & = & 1 \qquad \text{wegen } a_1^2, b_1^2 \in Z(G) \text{ und } c^2 = 1 \end{array}$$

Zudem gilt trivial $[a_1b_1, b_1] = [a_1, b_1]$, so daß die σ-Bilder der Erzeugenden wiederum alle definierenden Relationen gemäß Satz 10 erfüllen. Wir schließen, daß σ einen Automorphismus von G bestimmt. Mithin gilt $\sigma(x), \sigma^{-1}(x) \in UZ(G)$, da $UZ(G)$ charakteristisch in G ist.
Haben wir in (xxv) $f_1 = 0$, so finden wir

$$\sigma(x)x = b_1z' \ ; \qquad z' \in Z(G)$$

und für $f_1 = 1$ sehen wir

$$x\sigma^{-1}(x) = b_1z'' \ ; \qquad z'' \in Z(G) \ ,$$

also in jedem Falle $b_1 \in UZ(G)$, woraus ganz wie im Falle $p > 2$ leicht $a_1 \in UZ(G)$ folgt. Dementsprechend liegen alle a_i, b_i mit $1 \leq i \leq k$ und $m_i \geq 2$ in $UZ(G)$.

Ist aber $m_1 = 1$, gehen wir wie folgt vor:
Wir definieren die Abbildungen

$$\alpha_i : \begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & b_i \ ; \\ b_i & \mapsto & a_i \ ; \end{array} \qquad \left.\begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_j \\ b_j & \mapsto & b_j \end{array}\right\} \text{ für } j \neq i$$

und

$$\beta_{ij} : \begin{array}{rcl} a_i & \mapsto & a_ia_j \ ; \\ b_i & \mapsto & b_j \ ; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_j & \mapsto & a_i \ ; \\ b_j & \mapsto & b_ib_j \ ; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_s & \mapsto & a_s \\ b_s & \mapsto & b_s \end{array}$$
$$\text{mit } m_i = m_j = 1 \qquad\qquad \text{für } i \neq s \neq j$$

die, wie wir auch hier leicht nachrechnen, Automorphismen von G bestimmen. Möge o.B.d.A. $m_1 = \cdots = m_l = 1$ (bei $l \leq k$) gelten. Da nach den vorigen Überlegungen bereits alle Erzeugenden von höherer als der Ordnung 2, die in x in ungerader Potenz auftreten, auch selbst in $UZ(G)$ liegen, finden wir, daß auch

$$x' = a_1^{e_1}b_1^{f_1} \cdots a_l^{e_l}b_l^{f_l} \in UZ(G) \tag{xxvi}$$

gilt. Es stellt sich heraus, daß dann ein Element der Gestalt a_sb_s mit $1 \leq s \leq l$, also $m_s = 1$ in $UZ(G)$ liegt. Ist nämlich in (xxvi)

1. etwa $e_i = 1, f_i = 0$ oder $e_i = 0, f_i = 1$ für $1 \leq i \leq l$, so finden wir

$$\begin{array}{rcl} x'\alpha_i(x') = a_ib_iz & \in & UZ(G) \ ; \ z \in Z(G) \\ \Longrightarrow \qquad a_ib_i & \in & UZ(G) \end{array}$$

2. Dasselbe erhalten wir natürlich, falls schon x' selbst diese Gestalt hat.

3. Anderenfalls tritt in (xxvi) eine Sequenz $a_i b_i a_j b_j$ aus mindestens zwei Paaren von Erzeugenden der Ordnung 2 auf ($1 \leq i, j \leq l$). Dann freilich ist

$$\begin{array}{rrcll} & \beta_{ij}(x')x' & = & a_i a_j b_j a_i b_i b_j z \ ; & \qquad z \in Z(G) \\ & & = & a_j b_i z & \\ \Longrightarrow & x'' & = & a_j b_i \in UZ(G) & \end{array}$$

Damit liegt nun wieder Fall 1 vor, so daß wir auch hier für ein s mit $1 \leq s \leq l$ finden: $a_s b_s \in UZ(G)$.

Da laut Voraussetzung mit einem auch mindestens zwei Koeffizienten m_i den Wert 1 haben, bestehen nichttriviale Automorphismen von G, die durch

$$\gamma_{ij} \ : \ \left.\begin{array}{ccc} a_i & \mapsto & a_j \ , \\ b_i & \mapsto & b_j \ , \end{array} \quad \begin{array}{ccc} a_j & \mapsto & a_i \\ b_j & \mapsto & b_i \end{array}\right\} \text{für } 1 \leq i, j \leq l \ , \ i \neq j$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_r & \mapsto & a_r \\ b_r & \mapsto & b_r \end{array}\right\} \text{für } i \neq r \neq j$$

bestimmt sind. Mit $a_i b_i$ liegt vermöge γ_{ij} auch $a_j b_j$ in $UZ(G)$. Damit finden wir weiter

$$\begin{array}{rrcl} & \beta_{ij}(a_i b_i a_j b_j) a_j b_j & = & a_i a_j b_j a_i b_i b_j a_j b_j \\ & & = & b_i b_j \in UZ(G) \\ \Longrightarrow & \beta_{ij}^{-1}(b_i b_j) & = & b_j \in UZ(G) \end{array}$$

woraus mit den Automorphismen α_i und γ_{ij} folgt, daß alle a_i, b_i mit $m_i = 1$ in $UZ(G)$ liegen.
Mithin finden wir für alle $i = 1...k$ aus (xxv) $a_i, b_i \in UZ(G)$. Daraus ersieht man nun sofort, daß alle G-Konjugierten von x bereits unter $UZ(G)$, also schon in U zu x konjugiert sind. Da dieses für jede charakteristische Untergruppe U und für jedes ihrer Elemente x gilt, ist G charakteristisch-quasiprimitiv.

Es bleibt nur noch der Fall, daß G eine Gruppe vom Typ I mit $d \geq 2$ oder vom Typ III ist, in der $m_{i_0} = 1$ genau einmal auftritt.
Ist o.B.d.A. $m_1 = 1$, so haben wir in (xxvi) $l \leq 1$, also den Fall $l = 1$ zu untersuchen. Ist hierbei $e_1 = 0$ oder $f_1 = 0$, so folgt $a_1, b_1 \in UZ(G)$ mit dem Automorphismus α_1. Ist jedoch $e_1 = f_1 = 1$, so bemerken wir für Typ III, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rcclcccl} \delta : a_1 & \mapsto & a_1 b_1 a_t \ ; & \qquad & a_i & \mapsto & a_i & \\ b_1 & \mapsto & b_1 \ ; & & b_i & \mapsto & b_i \ ; & \qquad \text{für } i \neq 1 \end{array}$$

wegen

$$\begin{aligned}(a_1b_1a_t)^2 &= a_1^2b_1^2ca_t^2 &&= ca_t^2 \\ &= c^2 &&= 1; \qquad \text{mit } a_t^2 = c = [a_1, b_1]\end{aligned}$$

einen Automorphismus von G bestimmt. Für Typ I wählen wir dabei statt des Elementes a_t das Element $c^{2^{d-2}}$. Dieser Automorphismus liefert nun

$$\begin{aligned}\delta(x') &= \delta(a_1b_1) &&= a_1b_1a_tb_1 \\ & &&= a_1a_t \quad \in UZ(G) \\ (\text{bzw.} & &&= a_1c^{2^{d-2}} \quad \in UZ(G)\ )\end{aligned} \tag{xxvii}$$

Aufgrund der obigen Überlegungen für diejenigen Indizes j mit $m_j \geq 2$ folgt daraus $a_t \in UZ(G)$. Damit liegt nach (xxvii) auch a_1, und vermöge α_1 auch b_1 in $UZ(G)$. Daher können wir wie in den vorangegangenen Fällen schließen, daß alle G-Konjugierten von x bereits in $UZ(G)$, also schon unter U zu x konjugiert sind - und zwar für alle charakteristischen Untergruppen U und alle ihre Elemente x. Mithin ist G charakteristisch - quasiprimitiv.

q.e.d.

39. Korollar

Sei G eine nichtabelsche charakteristisch - quasiprimitive p-Gruppe, in welcher $Z(G) \cap \Phi(G)$ zyklisch ist. Dann ist G das direkte Produkt einer extraspeziellen p-Gruppe vom Exponenten p und/oder einer Quaternionengruppe mit einer abelschen Gruppe bei vereinigten Kommutatorgruppen.

Beweis:

Zunächst liefert Lemma 9, daß $\Phi(G)$ zyklisch ist. Da G' in $\Phi(G)$ liegt, ist also auch G' zyklisch. Mit Korollar 32 ergibt das $|G'| = p$.

Wir können also Satz 38 anwenden. Nach Satz 38 muß G vom Typ I oder III (gemäß Satz 10) mit $m_i = n_i$ für $1 \leq i \leq t$ sein. Dabei kann bei Typ I keiner der Koeffizienten m_i, n_i größer als 1 sein, da

$$\mho_1(G) = \langle a_1^p, ..., a_t^p, b_1^p, ..., b_t^p, c^p \rangle \leq \Phi(G)$$

zyklisch ist. Wäre nämlich o.B.d.A. etwa $n_j > 1$, so wäre sofort auch $m_j > 1$, so daß a_j und b_j eine nichttriviale gemeinsame Potenz hätten. Das kann aber bei Typ I überhaupt nicht, und bei Typ III nur für a_t, b_t auftreten. Die Gruppe ist also vom Typ

$$\begin{pmatrix} 1, & ..., & 1 & & \\ 1, & ..., & 1 & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1, & ..., & 1 & ; & \underline{2} \\ 1, & ..., & 1 & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2$$

Damit ist sie offenbar von der behaupteten Gestalt. Umgekehrt liefert Satz 38 auch, daß diese Gruppen charakteristisch-quasiprimitiv sind.

q.e.d.

40. Korollar
Jede extraspezielle p-Gruppe G vom Exponenten p ist charakteristisch - quasiprimitiv.

Beweis:
Eine 2-Gruppe vom Exponenten 2 ist abelsch, daher in trivialer Weise charakteristisch - quasiprimitiv. Wir nehmen also $p > 2$ an.
Da G extraspeziell ist, haben wir jedenfalls $|G'| = p$ und können Satz 10 anwenden. Da G den Exponenten p hat, kann G nicht vom Typ II sein, denn dort wäre $n_t \geq 2$ notwendig. Daher ist G vom Typ I und es gilt $m_i = n_i = 1$ für alle $i = 1...t$. Somit ist G nach Satz 38 charakteristisch - quasiprimitiv.

q.e.d.

Des weiteren eröffnet die Klassifikation der Gruppen von der Ordnung p^3 die Möglichkeit, die charakteristisch-quasiprimitiven darunter zu erkennen.

41. Korollar
Von den nichtabelschen Gruppen der Ordnung p^3 sind die Quaternionengruppe sowie die durch die Relationen

$$p \neq 2 \qquad \{a^p = b^p = c^p = 1, [a, b] = c, ac = ca, bc = cb\} \tag{xxviii}$$

bestimmten Gruppen charakteristisch-quasiprimitiv, und die Diedergruppe sowie die durch die Relationen

$$p \neq 2 \qquad \{a^{p^2} = 1, b^p = 1, b^{-1}ab = a^{p+1}\} \tag{xxix}$$

bestimmten sind es nicht.

Beweis: Die durch die Relationen (xxviii) definierten Gruppen sind offensichtlich extraspeziell vom Exponenten p, also nach Korollar 40 charakteristisch-quasiprimitiv.
Für die Quaternionengruppe $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ sieht man schnell, daß sie nur das Zentrum {1,-1} als nichttriviale charakteristische Untergruppe besitzt. Mit jedem weiteren Element, also einem der $(\pm)i, j, k$, lägen in einer charakteristischen Untergruppe nämlich sofort alle Elemente, da die zyklische Permutation der (i, j, k) Automorphismen von Q hervorruft.
Die Diedergruppe schließlich ist bestimmt durch die Relationen

$$\{a^4 = 1, b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\} \tag{xxx}$$

woraus wir entnehmen, daß $\langle a \rangle$ ein Normalteiler der Ordnung 4 ist, so daß die Diedergruppe $D = \langle a \rangle \langle b \rangle$ ist. Jedes Element von D hat also die Gestalt a^j, b, oder $a^j b$. Nun ist $a^j b a^j b = a^j b^{-1} a^j b$, weil $b = b^{-1}$, also nach (xxx) $(a^j b)^2 = a^j a^{-j} = 1$. Damit ist $\langle a \rangle$ die einzige zyklische Untergruppe der Ordnung 4, also charakteristisch, liegt aber offenkundig nicht im Zentrum.
Die durch (xxix) definierten Gruppen G sind vom Typ II, also nach Satz 38 nicht charakteristisch quasiprimitiv.

q.e.d.

Nachdem die charakteristisch-quasiprimitiven p-Gruppen mit zyklischer Kommutatorgruppe durch Satz 38 vollständig klassifiziert sind, wollen wir nun versuchen, die allgemeine Situation näher zu beschreiben. Die Gruppe G sei für den Rest dieser Sektion stets eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe. Dann sichert Lemma 32, daß G' elementarabelsch ist. Für ein $c \in G'$ mit $c \neq 1$ führen wir die Untergruppe Z_c^* durch

$$Z_c^* / \langle c \rangle = Z(G/\langle c \rangle)$$

ein[4]. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} Z_c^* &= \{x \in G | \ [x, G] \subseteq \langle c \rangle\} \ , \\ Z_c^* &\supseteq Z(G) \ . \end{aligned}$$

42. Proposition

Sind $\langle c_1 \rangle$ und $\langle c_2 \rangle$ verschiedene Untergruppen der Ordnung p von G', so gilt

$$Z_{c_1}^* \cap Z_{c_2}^* = Z(G)$$

und

$$[Z_{c_1}^*, Z_{c_2}^*] = 1 \ .$$

Beweis:

Ist $x \in Z_{c_1}^* \cap Z_{c_2}^*$ und $g \in G$, so folgt

$$g^{-1} x g = x c_1^{i_1} = x c_2^{i_2}$$

mit gewissen $i_1, i_2 \in \{0, 1, ..., p-1\}$, und dann haben wir

$$c_1^{i_1} = c_2^{i_2} \in \langle c_1 \rangle \cap \langle c_2 \rangle = 1 \ ,$$

so daß x mit beliebigem $g \in G$ kommutiert. Das ergibt $Z_{c_1}^* \cap Z_{c_2}^* \subseteq Z(G)$, mithin $Z_{c_1}^* \cap Z_{c_2}^* = Z(G)$.
Die zweite Aussage erhalten wir aus

$$[Z_{c_1}^*, Z_{c_2}^*] \subseteq [Z_{c_1}^*, G] \cap [G, Z_{c_2}^*] \subseteq \langle c_1 \rangle \cap \langle c_2 \rangle = 1$$

[4]Genaugenommen ist eine durch die *Untergruppe* $\langle c \rangle$ von G' indizierte Untergruppe $Z_{\langle c \rangle}^*$ von G gemeint, doch bevorzugen wir der einfacheren Schreibweise wegen die im Text angegebene Form, wobei wir beachten wollen, daß $\langle c_1 \rangle = \langle c_2 \rangle$ stets $Z_{c_1}^* = Z_{c_2}^*$ impliziert.

q.e.d.

43. Lemma
Sei G eine charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe und $c \in G'$.

1. *Sei U eine charakteristische Untergruppe von Z_c^*. Dann ist U konjugationsautonom in G. Insbesondere ist Z_c^* selbst konjugationsautonom in G.*
2. *Z_c^* ist charakteristisch-quasiprimitiv.*
3. *$Z(Z_c^*) = Z(G)$.*

Beweis:
Sicher ist die Untergruppe

$$V := \prod_{\alpha \in Aut(G)} U^\alpha$$

charakteristisch und daher konjugationsautonom in G. Offensichtlich ist $(Z_c^*)^\alpha = Z_{c^\alpha}^*$ für $\alpha \in Aut(G)$. Da verschiedene U^α in verschiedenen $Z_{c^\alpha}^*$ liegen, welche nach Proposition 42 elementweise vertauschbar sind, so wirken in V überhaupt nur Elemente aus U nichttrivial via Konjugation auf U. Daher ist U konjugationsautonom in V und damit in G.
Ist nun K charakteristisch in U, so auch in Z_c^*, also aus denselben Erwägungen konjugationsautonom in G, mithin auch in U. Folglich ist U charakteristisch-quasiprimitiv.
Da Z_c^* konjugationsautonom in G ist, muß ein Element aus $Z(Z_c^*)$ auch mit allen Elementen aus G kommutieren, also in $Z(G)$ liegen. Dann folgt trivial $Z(Z_c^*) = Z(G)$.

q.e.d.

Aus Lemma 43 und der Definition von Z_c^* erhalten wir unmittelbar

44. Korollar
Ist $Z_c^* \neq Z(G)$, so ist Z_c^* nichtabelsch mit $(Z_c^*)' = \langle c \rangle$.

45. Satz
Jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe G ist das direkte Produkt mit vereinigten Zentren aus dem Erzeugnis H aller Elemente der Breiten 0 *und* 1 *in G und dessen Zentralisator $C_G(H)$.*
Dabei ist

$$H = Z_{c_1}^* \curlyvee \cdots \curlyvee Z_{c_r}^* \qquad \text{(xxxi)}$$

das direkte Produkt mit vereinigten Zentren charakteristisch-quasiprimitiver Untergruppen $Z_{c_i}^*$ von G mit jeweils primzyklischer Kommutatorgruppe, und $C_G(H)$ enthält kein Element der Breite 1.

Beweis:
Enthält G kein Element der Breite 1, wird der Satz zur Tautologie. Anderenfalls sei $Z^*_{c_1},...,Z^*_{c_s}$ die Gesamtheit aller *verschiedenen* Untergruppen der Gestalt Z^*_c mit $c \in G'$. Für $s = 1$ haben wir $H = Z^*_{c_1}$. Ansonsten wählen wir aus der obigen Gesamtheit zunächst $Z^*_{c_{i_1}} := Z^*_{c_1}$ und $Z^*_{c_{i_2}} := Z^*_{c_2}$ aus und sehen anhand von Proposition 42 und Lemma 43,3., daß

$$Z^*_{c_{i_1}} Z^*_{c_{i_2}} = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}} \tag{xxxii}$$

gilt. Möglicherweise ist nun bereits $Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}} = H$. Anderenfalls findet sich $Z^*_{c_{i_3}}$; $i_3 \in \{3,...,s\}$ mit $Z^*_{c_{i_3}} \not\leq Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee Z^*_{c_{i_2}}$.
Sei allgemein $Z^*_{c_{i_{k+1}}} \not\leq Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}}$.
Wir betrachten ein beliebiges $x \in Z^*_{c_{i_{k+1}}} \cap (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}})$. So ein Element kann also in der Form $x = h_1 \cdots h_k$ mit $h_l \in Z^*_{c_{i_l}}$ geschrieben werden. Dabei kann es nicht auftreten, daß mehr als eines der h_l außerhalb $Z(G)$ liegt, da sonst x eine echt größere Breite als 1 hätte, was $x \in Z^*_{c_{i_{k+1}}}$ widerspräche. Läge genau eines der h_l außerhalb $Z(G)$, also etwa h_1, so folgte $x \notin Z(G)$ und $x \in Z^*_{c_{i_1}} \cap Z^*_{c_{i_{k+1}}}$, was nach Proposition 42 wegen der Verschiedenheit unserer $Z^*_{c_1},...,Z^*_{c_s}$ unmöglich ist. Folglich haben wir $x \in Z(G)$. Das ergibt

$$Z^*_{c_{i_{k+1}}} \cap (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}}) = Z(G)$$

und aus Proposition 42 folgt trivial

$$[Z^*_{c_{i_{k+1}}}, (Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_k}})] = 1 \ .$$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\langle Z^*_{c_{i_1}}, ..., Z^*_{c_{i_{k+1}}} \rangle = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_{k+1}}} \ .$$

Diese Betrachtung als Induktionsschritt nutzend, schließen wir aus (xxxii) induktiv auf

$$H = \langle Z^*_{c_1}, ..., Z^*_{c_s} \rangle = Z^*_{c_{i_1}} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_{i_r}}$$

mit $1 \leq r \leq s$ und $i_1,...,i_r \in \{1,...,s\}$. Der Übersichtlichkeit wegen wollen wir nun die $Z^*_{c_l}$ derart umordnen, daß wir

$$H = Z^*_{c_1} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_r} \tag{xxxiii}$$

erhalten. Natürlich ist die Untergruppe H als Erzeugnis aller Elemente der Breiten 0 und 1 charakteristisch in G und daher konjugationsautonom. Jedes Element $g \in G$ induziert daher via Konjugation einen klassenerhaltenden Automorphismus von H, nach Lemma 12 also einen inneren, da H mit (xxxiii) und Korollar 44 offenbar das direkte Produkt mit vereinigten Zentren von p-Gruppen mit primzyklischer Kommutatorgruppe ist. Folglich unterscheidet sich jedes Element $g \in G$ nur um ein H zentralisierendes Element von einem Element h_g aus H. Darum finden wir

$$G = HC_G(H) \ . \tag{xxxiv}$$

Lemma 43,3. lehrt zusammen mit (xxxiii) $Z(G) \leq Z(H)$. Andrerseits ist mit H auch $Z(H)$ charakteristisch in G, so daß aufgrund der charakteristischen Quasiprimitivität von G sofort $Z(H) = Z(G)$ folgt. Mit H ist freilich auch $C_G(H)$ charakteristisch in G, trivial gilt $Z(G) \leq Z(C_G(H))$, also auch hier $Z(G) = Z(C_G(H))$ wegen der charakteristischen Quasiprimitivität von G. Somit haben wir

$$Z(G) = Z(H) = H \cap C_G(H) = Z(C_G(H)) \tag{xxxv}$$

und trivial gilt $[H, C_G(H)] = 1$. Mit (xxxiv) und (xxxv) folgt daraus

$$G = H \curlyvee C_G(H) \tag{xxxvi}$$

Die charakteristische Quasiprimitivität der Z^*_{cl} ist durch Lemma 43 bereits gesichert. Daß $C_G(H)$ kein Element der Breite 1 enthält, folgt aus der Konjugationsautonomie von $C_G(H)$ als charakteristischer Untergruppe von G, Gleichung (xxxv) und dem Umstand, daß H *alle* Elemente der Breite 1 von G enthält.

q.e.d.

Bemerkungen:

1. Wird insbesondere G aus Elementen der Breite 1 erzeugt, so ist die Zerlegung (xxxi) in Satz 45 eine Zerlegung von G.

2. Die Zerlegung läßt sich natürlich in der Weise fortsetzen, daß in $C_G(H)$ das Erzeugnis aller Elemente der Breite 2 betrachtet wird und so fort. Doch ist einerseits dieses Erzeugnis nicht mehr generell in der Manier von Satz 45 als direktes Produkt mit vereinigten Zentren von charakteristisch-quasiprimitiven Gruppen der Kommutatorgruppenordnung $p^2, p^3, \ldots$ darstellbar, und andrerseits liegen p-Gruppen mit zentral gelegener elementarabelscher Kommutatorgruppe höherer Ordnung nicht in der Weise determiniert vor, wie diejenigen mit primzyklischer Kommutatorgruppe, die durch Satz 10 gegeben sind.

Die Charakterisierung als direktes Produkt mit vereinigten Zentren charakteristisch-quasiprimitiver Gruppen mit je zyklischer Kommutatorgruppe (Bemerkung 1) läßt sich nicht für beliebige Kommutatorgruppenordnungen ableiten, wie das folgende einfache Beispiel belegt.

Für eine Primzahl $p \neq 2$ sei $P := \langle a_0, a_1, a_2, c_1, c_2, c_3 \rangle$ mit den definierenden Relationen

$$\begin{aligned} a_0^p = a_1^p = \quad 1 \quad &= c_1^p = c_2^p = c_3^p \ ; && \text{(xxxvii)} \\ a_2^p = \quad 1 \quad &; && \text{(xxxviii)} \\ [a_0, a_1] = \quad c_1 \quad &; && \text{(xxxix)} \\ [a_0, a_2] = c_2 \quad ; \quad &[a_1, a_2] = c_3 \ ; && \text{(xl)} \\ c_1, \quad c_2 \quad &, c_3 \text{ zentral} && \text{(xli)} \end{aligned}$$

Zunächst sehen wir die Existenz und eindeutige Bestimmtheit von P dadurch ein, daß wir P als semidirektes Produkt

$$P = \langle a_2 \rangle \rtimes (\langle a_1 \rangle \rtimes (\langle a_0 \rangle \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \langle c_3 \rangle))$$

darstellen können. Dabei ist die Existenz und Eindeutigkeit des inneren semidirekten Produktes anhand der obigen Relationen (xxxvii), (xxxix), (xli) evident und das Produkt durch diese Relationen determiniert. Anhand dieser Relationen überprüft man leicht, daß dann die Relationen (xxxviii), (xl) die Wirkung von a_2 auf $\langle a_1 \rangle \rtimes (\langle a_0 \rangle \times \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle \times \langle c_3 \rangle)$ als Automorphismus bestimmen.
Nun finden wir, daß die durch die Abbildungen

$$\sigma_0 : \quad \begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & a_0^{-1} \ , \\ a_1 & \mapsto & a_1 \ , \\ a_2 & \mapsto & a_2 \ , \end{array} \qquad \begin{array}{lll} c_1 & \mapsto & c_1^{-1} \ , \\ c_2 & \mapsto & c_2^{-1} \ , \\ c_3 & \mapsto & c_3 \ , \end{array}$$

$$\sigma_1 : \quad \begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & a_0 \ , \\ a_1 & \mapsto & a_1^{-1} \ , \\ a_2 & \mapsto & a_2 \ , \end{array} \qquad \begin{array}{lll} c_1 & \mapsto & c_1^{-1} \ , \\ c_2 & \mapsto & c_2 \ , \\ c_3 & \mapsto & c_3^{-1} \ , \end{array}$$

definierten Elemente $\sigma_i(a_0), ..., \sigma_i(c_3)$ alle definierenden Relationen (xxxvii) - (xli) erfüllen und natürlich P erzeugen. Wir schließen, daß die σ_i Automorphismen von P bestimmen. Desgleichen die Abbildungen

$$\zeta : \quad \begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & a_1 \ , \\ a_1 & \mapsto & a_2 \ , \\ a_2 & \mapsto & a_0 \ , \end{array} \qquad \begin{array}{lll} c_1 & \mapsto & c_3 \ , \\ c_2 & \mapsto & c_1^{-1} \ , \\ c_3 & \mapsto & c_2^{-1} \ , \end{array}$$

und

$$\kappa : \quad \begin{array}{lll} a_0 & \mapsto & a_1 \ , \\ a_1 & \mapsto & a_0 \ , \\ a_2 & \mapsto & a_2 \ , \end{array} \qquad \begin{array}{lll} c_1 & \mapsto & c_1^{-1} \ , \\ c_2 & \mapsto & c_3 \ , \\ c_3 & \mapsto & c_2 \ , \end{array}$$

welche die a_i zyklisch permutieren bzw. a_0 und a_1 vertauschen. Es folgt, daß jede Permutation der a_i einen Automorphismus von P definiert.

Sei jetzt U eine charakteristische Untergruppe von P. Wir wollen zeigen, daß U dann autonom in P ist. Liegt U in $Z(P)$, besteht kein Problem. Ist jedoch etwa $x \in U \backslash Z(P)$, also

$$x = a_0^u a_1^v a_2^w z$$

mit $0 \leq u, v, w < p$ und $z \in Z(P)$, so können wir vermöge der Automorphismen κ und ζ o.B.d.A. annehmen, daß $w \neq 0$ sei. Dann liegt $\sigma_0(\sigma_1(x))$ ebenfalls in U. Folglich haben wir

$$x\sigma_0(\sigma_1(x)) = a_2^w z' \in U$$

mit $z' \in Z(P)$. Daraus folgt sofort $a_2 \in UZ(P)$, womit vermöge κ und ζ auch a_0 und a_1 in $UZ(P)$ liegen. Das ergibt

$$P = UZ(P) \ .$$

Folglich ist U konjugationsautonom in P, und P ist somit charakteristisch-quasiprimitiv.
Wir wollen nun noch zeigen, daß P keine Elemente der Breite 1 enthält.
Dazu nehmen wir an, es sei

$$x = a_0^u a_1^v a_2^w z; \qquad ; 0 \leq u, v, w < p \ ; \ z \in Z(P)$$

ein solches Element und berechnen

$$\begin{array}{lcccc} [a_0, x] & = & c_1^v & c_2^w & \\ [a_1, x] & = & c_1^{-u} & & c_3^w \\ [a_2, x] & = & & c_2^{-u} & c_3^{-v} \ . \end{array}$$

Hätte nun x die Breite 1, so müßte von diesen drei Kommutatoren schon einer die beiden anderen als Potenzen erzeugen. Wären etwa alle drei Kommutatoren Potenzen von $[a_0, x]$, so folgte mit Lemma 8 sofort $v = 0$, daher $u = 0$ und somit $x = a_2^w$, was aber die Breite 2 hat. Analog schließt man für die anderen beiden Varianten. Daher gibt es in der charakteristisch-quasiprimitiven p-Gruppe P kein Element der Breite 1.

Für charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 finden wir immerhin, daß nach der Zerlegung gemäß Satz 45 der auftretende Zentralisator $C_G(H)$ (sofern er nicht abelsch und daher zentral in G ist) die Eigenschaft hat, daß jedes nichtzentrale Element aus $C_G(H)$ eine Konjugiertheitsklasse der Länge p^2 aufspannt. Daher ist $C_G(H)$ nach Satz [4.7] aus [2] eine nichtabelsche SNC-Gruppe. Die SNC-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 mit dem Zentrumsindex p^4 und elementarabelschem Zentrum sind nun in [15] vollständig klassifiziert.
Wir wollen diese Klassifikation zur Feststellung der charakteristisch - quasiprimitiven unter den direkt unzerlegbaren p-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2, vom Zentrumsindex p^4 mit elementarabelschem Zentrum und ohne Elemente der Breite 1 benutzen. Das verschafft uns Beispiele für charakteristisch

- quasiprimitive p-Gruppen, die nicht aus ihren Elementen der Breite 1 erzeugt werden.
Dazu folgen wir im wesentlichen der Bezeichnung und Numerierung aus [15]. Wir bezeichnen daher mit z_i die Elemente des Zentrums der betrachteten Gruppen, wobei die Kommutatorgruppe standardmäßig von z_1 und z_2 erzeugt wird. Zunächst zeigt Langemann, daß es in jeder Gruppe von der betrachteten Natur Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 gibt, mit denen $A := \langle a_1, a_2 \rangle$ und $B := \langle b_1, b_2 \rangle$ abelsche Normalteiler von G mit der Eigenschaft

$$AB = G \qquad \text{und} \qquad A \cap B = Z(G)$$

sind. Es wird ferner gezeigt, daß diese Elemente sogar so gewählt werden können, daß eine *Normalform* der zwischen ihnen bestehenden Kommutatorbeziehnugen erreicht wird. Für $p \neq 2$ ist lautet diese:

$$\begin{array}{rclcrcl} [a_1, b_1] & = & z_1 & ; & [a_1, b_2] & = & z_2 \ ; \\ [a_2, b_1] & = & z_2 & ; & [a_2, b_2] & = & z_1^c \end{array}$$

mit einem modulo p nichtquadratischen c. Dabei ergeben sich für alle Nichtquadrate modulo p isomorphe Gruppen. In [15] werden die nichtisomorphen Gruppen schließlich durch Relationen angegeben, welche zusammen mit der Normalform der Kommutatorrelationen (oder explizit angegebener anderer) sowie der Vertauschbarkeit der a_i resp. b_i jeweils untereinander die Gruppen gerade bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen. Diese Relationen haben durchweg die Form

$$a_1^p = x_1 \ ; \ a_2^p = x_2 \ ; \ b_1^p = y_1 \ ; \ b_2^p = y_2 \ , \tag{xlii}$$

wobei x_i, y_i natürlich stets Zentrumselemente sind.
Wir behandeln zunächst den Fall $p > 2$.
Die betrachteten Gruppen sind nilpotent von der Klasse 2 und daher regulär. Wie zu Beginn des Beweises von Satz 38 schließen wir, daß $ord(a_1) = ord(a_2) = ord(b_1) = ord(b_2)$ gelten muß, wenn die erzeugte Gruppe charakteristisch - quasiprimitiv ist: wäre etwa $p^n = ord(a_i) < ord(b_j)$, so läge kein Element, das – aus a_1, a_2, b_1, b_2 und irgendwelchen zentralen Elementen erzeugt – eine nichtzentrale Potenz von b_j enthält in $\Omega_n(G)$. Dadurch hätte a_i in $\Omega_n(G)$ höchstens die Breite 1, was der Konjugationsautonomie der charakteristischen Untergruppe $\Omega_n(G)$ widerspräche. Daher gilt $ord(a_i) \leq ord(b_j)$ und analog $ord(b_i) \leq ord(a_j)$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$, also wie behauptet $ord(a_1) = \cdots = ord(b_2)$ für die charakteristisch - quasiprimitiven unter den betrachteten SNC-Gruppen. Dadurch erledigen sich die Gruppen unter (2), (3), (4), (5), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (15), (16), (17), (18) und (19) in der Auflistung der fraglichen SNC-Gruppen für den Fall $p > 2$ in [15], Kap.5 (S.46) – sie sind sicher nicht charakteristisch - quasiprimitiv. Für die durch (20) und (21) bestimmten Gruppen wird in [15] die charakteristische Untergruppe H aller derjenigen Elemente von G betrachtet, deren p-te

Potenz in G' liegt. Für die durch (20) bestimmten Gruppen ist H' von der Ordnung p, während H bei den durch (21) gekennzeichneten Gruppen abelsch, aber echt größer als $Z(G)$ ist. In jedem der beiden Fälle ist daher H sicher nicht konjugationsautonom in G, somit G nicht charakteristisch - quasiprimitiv.
Für die durch (14) determinierten Gruppen entnehmen wir [15], daß z_1 hier ein Element ist, das die charakteristische Untergruppe $F := G' \cap \mho_1(G)$ erzeugt, die in diesem Fall (Kap.4.1; Fall 2.4, S.26 bzw. 30) die Ordnung p hat. Wäre eine so bestimmte Gruppe G charakteristisch - quasiprimitiv, so wäre laut Korollar 29 auch $G/\langle z_1\rangle$ charakteristisch - quasiprimitiv. Allerdings hat $G/\langle z_1\rangle$ eine primzyklische Kommutatorgruppe und wird von $a_1\langle z_1\rangle, a_2\langle z_1\rangle, b_1\langle z_1\rangle, b_2\langle z_1\rangle$ erzeugt, wobei $a_1\langle z_1\rangle$ mit $b_1\langle z_1\rangle$ und $a_2\langle z_1\rangle$ mit $b_2\langle z_1\rangle$ kommutiert, während $[a_1\langle z_1\rangle, b_2\langle z_1\rangle] = [a_2\langle z_1\rangle, b_1\langle z_1\rangle] = z_2\langle z_1\rangle$ gilt. Überdies kann $z_2 \notin F$ nicht p-te Potenz eines Elementes aus G, folglich $z_2\langle z_1\rangle$ nicht p-te Potenz eines Elementes aus $G/\langle z_1\rangle$ sein. Alles in allem ist $G/\langle z_1\rangle$ vom Typ

$$\begin{pmatrix} 1, & 2 & & \\ 2, & 2 & ; & \underline{1} \end{pmatrix}_p$$

und somit nach Satz 38 nicht charakteristisch - quasiprimitiv. Daher sind es auch die durch (14) bestimmten Gruppen nicht.
Zu untersuchen bleiben die beiden Fälle

$$\begin{array}{lllll} (1) & a_1^p = 1 & a_2^p = 1 & b_1^p = 1 & b_2^p = 1 \\ (6) & a_1^p = z_3 & a_2^p = z_4 & b_1^p = z_5 & b_2^p = z_6 \; . \end{array}$$

Wir werden zeigen, daß die durch (1) bzw. (6) bestimmten Gruppen charakteristisch - quasiprimitiv sind. Hierzu definieren wir einige Abbildungen.

$$\begin{array}{rlllllll} \tau_{xy}: & a_1 & \mapsto & a_1^x b_1^y \;; & \qquad & a_2 & \mapsto & a_2^x b_2^y \;; \\ & b_1 & \mapsto & b_1^{x^{-1}} \;; & & b_2 & \mapsto & b_2^{x^{-1}} \end{array}$$

mit $x, y \in \{0, ..., p-1\}$; $x \neq 0$; $x^{-1}x \equiv 1\ (mod\ p)$.

$$\begin{array}{rlllllll} \sigma_{xy}: & a_1 & \mapsto & a_1^{y^{-1}} \;; & \qquad & a_2 & \mapsto & a_2^{y^{-1}} \;; \\ & b_1 & \mapsto & a_1^x b_1^y \;; & & b_2 & \mapsto & a_2^x b_2^y \end{array}$$

mit $x, y \in \{0, ..., p-1\}$; $y \neq 0$; $y^{-1}y \equiv 1\ (mod\ p)$.

$$\begin{array}{rlllllll} \iota_1: & a_1 & \mapsto & a_1^{-1} \;; & \qquad & a_2 & \mapsto & a_2 \;; \\ & b_1 & \mapsto & b_1^{-1} \;; & & b_2 & \mapsto & b_2 \end{array}$$

und entsprechend ι_2.

$$\begin{array}{rlllllll} \mu: & a_1 & \mapsto & b_1 \;; & \qquad & a_2 & \mapsto & b_2 \;; \\ & b_1 & \mapsto & a_1 \;; & & b_2 & \mapsto & a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcllrcl} \zeta: a_1 & \mapsto & a_2\,; & \qquad & a_2 & \mapsto & a_1\,; \\ b_1 & \mapsto & b_2\,; & & b_2 & \mapsto & b_1 \end{array}$$

Wir behaupten, daß die Bilder der Erzeugenden a_1, a_2, b_1, b_2 unter $\tau_{xy}, \sigma_{xy}, \iota_1, \iota_2, \mu, \zeta$ für die Fälle (1) und (6) wiederum alle jeweils definierenden Relationen erfüllen, sowie natürlich die jeweilige Gruppe G erzeugen, woraus wir schließen wollen, daß die Abbildungen Automorphismen bestimmen. Im einzelnen berechnen wir für beide Typen die Wirkung der Abbildungen in der Normalform der Kommutatorrelationen und die Vertauschbarkeit der a_i bzw. b_i:

$$\begin{array}{rcccccc} [\tau_{xy}(a_1);\tau_{xy}(b_1)] & = & [a_1^x b_1^y, b_1^{x^{-1}}] & = & [a_1,b_1]^{xx^{-1}} & = & z_1 \\ [\tau_{xy}(a_2);\tau_{xy}(b_1)] & = & [a_2^x b_2^y, b_1^{x^{-1}}] & = & [a_2,b_1]^{xx^{-1}} & = & z_2 \\ [\tau_{xy}(a_1);\tau_{xy}(b_2)] & = & [a_1^x b_1^y, b_2^{x^{-1}}] & = & [a_1,b_2]^{xx^{-1}} & = & z_1 \\ [\tau_{xy}(a_2);\tau_{xy}(b_2)] & = & [a_2^x b_2^y, b_2^{x^{-1}}] & = & [a_2,b_2]^{xx^{-1}} & = & z_1^c \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} [\tau_{xy}(a_1),\tau_{xy}(a_2)] & = & [a_1^x b_1^y, a_2^x b_2^y] & = & [a_1,b_2]^{xy}[b_1,a_2]^{xy} & = & z_2^{xy}(z_2^{-1})^{xy}=1 \\ [\tau_{xy}(b_1),\tau_{xy}(b_2)] & = & [b_1^{x^{-1}}, b_2^{x^{-1}}] & =1 & & & \end{array}$$

Analog für σ_{xy}.

Es ist klar, daß bei ι_1 und ι_2 lediglich z_2 in z_2^{-1} (und für (6) z_3 in z_3^{-1}, z_5 in z_5^{-1} bzw. z_4 in z_4^{-1}, z_6 in z_6^{-1}) überführt wird, mit diesen neuen z_i jedoch alle Relationen trivial erhalten bleiben. Ebenso ist leicht zu sehen, daß bei μ zwar z_1 und z_2 invertiert sowie z_3 mit z_5 und z_4 mit z_6 vertauscht werden, mit diesen Bildern jedoch alle Relationen inclusive (1) bzw. (6) gültig bleiben. Für ζ erhalten wir indessen

$$\begin{array}{rcccc} [\zeta(a_1),\zeta(b_1)] & = & [a_2,b_2] & = & z_1^c \\ [\zeta(a_2),\zeta(b_1)] & = & [a_1,b_2] & = & z_2 \\ [\zeta(a_1),\zeta(b_2)] & = & [a_2,b_1] & = & z_2 \\ [\zeta(a_2),\zeta(b_2)] & = & [a_1,b_1] & = & z_1 \end{array}$$

Mit c ist jedoch auch c^{-1} ein Nichtquadrat modulo p, so daß obige Relationen, wie eingangs erwähnt, wegen $z_1 = (z_1^c)^{c^{-1}}$ eine zur ursprünglichen isomorphe Gruppe beschreiben.

Es ist klar, daß alle fraglichen Abbildungen an den Relationen (1) nichts ändern. Für die Relationen (6) sehen wir ebenso schnell ein, daß die p-ten Potenzen der Bilder wiederum vier linear unabhängige zentrale Elemente außerhalb der Kommutatorgruppe liefern, wie in [15] als Determination für die Gruppen (6) angegeben.

Sei nun also G eine durch (1) oder (6) bestimmte p-Gruppe. Die Untergruppe U sei charakteristisch in G. Wir betrachten ein Element $u \in U$. Dieses kann in der Form

$$u = a_1^{x_1} a_2^{x_2} b_1^{y_1} b_2^{y_2} v_1$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, ..., p-1\}$ und $v_1 \in Z(G)$ geschrieben werden. Wir wollen zeigen, daß alle Konjugationen, die unter G für u möglich sind, bereits in U realisiert werden können. Ist $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$, liegt u zentral und es besteht kein Problem. Sei also etwa $x_1 \neq 0$. Dann haben wir zunächst

$$\iota_2(u)u = a_1^{x_1} a_2^{-x_2} b_1^{y_1} b_2^{-y_2} \iota_2(v_1) a_1^{x_1} a_2^{x_2} b_1^{y_1} b_2^{y_2} v_1 = a_1^{2x_1} b_1^{2y_1} v_2 \in U$$

mit $v_2 \in Z(G)$. Das ergibt wiederum

$$\tau_{2x_1,2y_1}^{-1}(\iota_2(u)u) = a_1 v_3 \in U$$

mit $v_3 \in Z(G)$. Daher haben wir $a_1 \in UZ(G)$. Natürlich ist $UZ(G)$ charakteristisch in G, daher liegen vermöge μ und ζ auch b_1, a_2 und b_2 in $UZ(G)$. Das bedeutet $UZ(G) = G$. Damit ist klar, daß U in G konjugationsautonom ist. Wir erhalten dasselbe Resultat, wenn x_2, y_1 oder y_2 von Null verschieden ist, wobei ggf. statt τ_{xy} ein Automorphismus σ_{xy} benutzt werden muß. Wir schließen, daß für jede charakteristische Untergruppe U von G, die überhaupt ein nicht in $Z(G)$ gelegenes Element enthält, stets $UZ(G) = G$ gilt. Somit ist G natürlich charakteristisch - quasiprimitiv.

Nun zum Fall $p = 2$.
In [15] wird gezeigt, daß jede direkt unzerlegbare 2–SNC–Gruppe G mit $|G'| = 2^2$, elementarabelschem Zentrum und Zentrumsindex 2^4 durch genau eines von 22 angegebenen Systemen definierender Relationen bestimmt ist. Zu diesen Relationen gehört wiederum jeweils eine Normalform der Kommutatorbeziehungen, die in diesem Fall die Gestalt

$$\begin{array}{rclcrcl} [a_1, b_1] & = & z_1 & ; & [a_1, b_2] & = & z_2 \ ; \\ [a_2, b_1] & = & z_2 & ; & [a_2, b_2] & = & z_1 z_2 \end{array}$$

annimmt. Klassifiziert werden die Gruppen schließlich wiederum durch Relationen–Quadrupel der Form (xlii), die mit (S0),...,(S4) und (1),...,(17) numeriert sind. Zusätzlich definiert Langemann in [15] die *Art* einer 2–SNC–Gruppe G als dasjenige Tripel (n_1, n_2, n_3) natürlicher Zahlen, dessen erste Komponente n_1 die Anzahl der maximal–abelschen Normalteiler vom Typ $(4, 4, ...)$ in G, dessen zweite Komponente n_2 die Anzahl derjenigen vom Typ $(4, 2, ...)$ und dessen dritte Komponente die Anzahl derer vom Typ $(2, 2, ...)$ in G angibt. Dabei sind die Punkte jeweils durch genügend viele Zweien aufzufüllen. Die Art jeder der klassifizierten 2–SNC–Gruppen ist in [15] zusammen mit den dazugehörigen Relationen unter Kap.5 (S.47) angegeben. Wir wollen sie benutzen, um die Anzahl der auf charakteristische Quasiprimitivität näher zu untersuchenden Fälle zu reduzieren:
Gibt es in G nur genau einen maximal–abelschen Normalteiler eines gewissen Typus, so ist dieser charakteristisch in G. Enthält er ein nichtzentrales Element, ist er nicht konjugationsautonom in G und daher G nicht charakteristisch – quasiprimitiv. Auf diese Weise erledigen sich für uns alle Gruppen der Arten $(1, n_2, n_3)$

und $(n_1, 1, n_3)$, da sie abelsche charakteristische Untergruppen mit Elementen der Ordnung 4 enthalten, die nun sicher nicht im elementarabelschen Zentrum von G liegen. Somit entfallen die Gruppen (S2), (S3), (1), (2), (5), (6), (9), (12) und (15) in der Numerierung aus [15]. Die Gruppe

$$[15] - (8) \qquad\qquad a_1^2 = z_3;\ a_2^2 = z_4;\ b_1^2 = 1;\ b_2^2 = 1$$

der Art $(4, 0, 1)$ ist ebenfalls sicher nicht charakteristisch – quasiprimitiv, da der einzige maximal–abelsche Normalteiler des Typs $(2, 2, ...)$ offenbar die nichtzentralen Elemente b_1, b_2 enthält.
Ist ferner das Quadrat x^2 eines der Erzeugenden a_1, a_2, b_1, b_2 ein Element außerhalb G', das von den anderen Erzeugendenquadraten linear unabhängig ist, so enthält kein Element von $\Omega_1(G)$ eine nichtzentrale Potenz dieses Erzeugenden als Faktor. Hat nun ein mit diesem x nicht kommutierendes Erzeugendes die Ordnung 2, so hat es in $\Omega_1(G)$ höchstens die Breite 1. Daher ist die charakteristische Untergruppe $\Omega_1(G)$ in solchem Fall nicht autonom in G, folglich G nicht charakteristisch – quasiprimitiv. Auf diesem Wege erledigen sich für uns die Gruppen (3), (4) und (11).
In der Gruppe mit den Relationen

$$[15] - (7) \qquad\qquad a_1^2 = z_3;\ a_2^2 = z_2;\ b_1^2 = z_2;\ b_2^2 = z_1 z_2$$

betrachten wir die minimale b_1 enthaltende charakteristische Untergruppe $\langle b_1 \rangle_{Aut(G)}$. Bei $\alpha \in Aut(G)$ muß $(\alpha(b_1))^2 \in G'$ gelten. Daher kann kein automorphes Bild von b_1 in seiner Faktorenzerlegung eine nichtzentrale Potenz von a_1 enthalten. Somit hat b_1 in $\langle b_1 \rangle_{Aut(G)}$ höchstens die Breite 1, und G ist nicht charakteristisch – quasiprimitiv.
Das gleiche Resultat erhalten wir für die Gruppe (10) – sie ist ebenfalls nicht charakteristisch – quasiprimitiv. In der Gruppe (13) betrachten wir analog die charakteristische Untergruppe $\langle a_2 \rangle_{Aut(G)}$, deren Elemente keine nichtzentrale Potenz von b_1 enthalten können. Für die Gruppen (14) und (16) sehen wir ebenso, daß die Elemente der charakteristischen Untergruppen $\langle b_2 \rangle_{Aut(G)}$ keine nichtzentrale Potenz von a_1 enthalten. Somit sind auch die Gruppen unter (7), (10), (13), (14) und (16) nicht charakteristisch – quasiprimitiv.
Sei G eine durch

$$[15] - (S4) \qquad\qquad a_1^2 = z_2;\ a_2^2 = 1;\ b_1^2 = 1;\ b_2^2 = z_2$$

bestimmte 2–SNC–Gruppe. Wir wollen zeigen, daß kein Element von $\langle a_2 \rangle_{Aut(G)}$ eine nichtzentrale Potenz von b_2 als Faktor enthält. Dazu betrachten wir $\alpha \in Aut(G)$ und berechnen

$$\alpha(a_2) = a_1^{x_1} a_2^{x_2} b_1^{y_1} b_2^{y_2} z$$

mit $x_i, y_i \in \{-1, 0, 1\}$ und $z \in Z(G)$. Angenommen, es sei $y_2 = 1$.
Dann ist

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & (\alpha(a_2))^2 = a_1^{2x_1} a_2^{2x_2} b_1^{2y_1} b_2^{2y_2} z_1^{x_1y_1+x_2y_2} z_2^{x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1} \\ & = & z_2^{x_1} z_2^{y_2} z_1^{x_1y_1+x_2y_2} z_2^{x_2y_2+x_1y_2+x_2y_1} \\ \text{mit } y_2 = 1 \text{ also } 1 & = & z_1^{x_1y_1+x_2} z_2^{2x_1+x_2+x_2y_1+1} \\ 1 & = & z_1^{x_1y_1+x_2} z_2^{x_2(1+y_1)+1} \end{array}$$

Daher müssen

$$\begin{array}{rcll} x_1y_1 + x_2 & \equiv & 0 \; mod \; 2 & \text{(xliii)} \\ \text{und } x_2(1+y_1) + 1 & \equiv & 0 \; mod \; 2 & \text{(xliv)} \end{array}$$

gelten. Wegen (xliv) kann $x_2 \equiv 0 \; mod \; 2$ nicht auftreten. Für $x_2 \equiv 1 \; mod \; 2$ finden wir wiederum mit (xliv), daß $y_1 \equiv 0 \; mod \; 2$ gelten muß. Das ergibt aber $x_1y_1 + x_2 \equiv x_2 \equiv 1 \; mod \; 2$ im Widerspruch zu (xliii). Daher kann $y_2 = 1$ (und analog $y_2 = -1$) nicht auftreten. Folglich hat a_2 in $\langle a_2 \rangle_{Aut(G)}$ höchstens die Breite 1, $\langle a_2 \rangle_{Aut(G)}$ ist charakteristisch, aber nicht autonom in G, also G nicht charakteristisch – quasiprimitiv.

Es bleiben nur die Gruppen

$$\begin{array}{llllllllllllll} [15]-(S0) & a_1^2 & = & z_2 & ; & a_2^2 & = & z_1 & ; & b_1^2 & = & z_2 & ; & b_2^2 = z_1 \,, \\ [15]-(S1) & a_1^2 & = & 1 & ; & a_2^2 & = & 1 & ; & b_1^2 & = & 1 & ; & b_2^2 = 1 \,, \\ [15]-(17) & a_1^2 & = & z_3 & ; & a_2^2 & = & z_4 & ; & b_1^2 & = & z_5 & ; & b_2^2 = z_6 \end{array}$$

zu untersuchen. Wir werden sehen, daß diese in der Tat charakteristisch – quasiprimitiv sind.

Sei G durch (S0) aus [15] bestimmt.
Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{lllllllll} \beta: a_1 & \mapsto & a_1b_1 \,; & b_1 & \mapsto & a_1b_2 \,; & z_1 & \mapsto & z_1z_2 \\ a_2 & \mapsto & a_2b_2 \,; & b_2 & \mapsto & a_2b_1b_2 \,; & z_2 & \mapsto & z_1 \end{array}$$

und berechnen

$$\begin{array}{rclcl} (\beta(a_1))^2 & = & (a_1b_1)^2 = a_1^2b_1^2[a_1,b_1] = z_2^2z_1 = z_1 & = & \beta(z_2) \\ (\beta(a_2))^2 & = & (a_2b_2)^2 = a_2^2b_2^2[a_2,b_2] = z_1^2z_1z_2 = z_1z_2 & = & \beta(z_1) \\ (\beta(b_1))^2 & = & (a_1b_2)^2 = a_1^2b_2^2[a_1,b_2] = z_2z_1z_2 = z_1 & = & \beta(z_2) \\ (\beta(b_2))^2 & = & (a_2b_1b_2)^2 = a_2^2b_1^2b_2^2[a_2,b_2][a_2,b_1] = z_1z_2z_1z_1z_2z_2 = z_1z_2 & = & \beta(z_1) \\ [\beta(a_1),\beta(b_1)] & = & [a_1b_1, a_1b_2] = [a_1,b_2][b_1,a_1] = z_2z_1 & = & \beta(z_1) \\ [\beta(a_1),\beta(b_2)] & = & [a_1b_1, a_2b_1b_2] = [a_1,b_1][a_1,b_2][b_1,a_2] = z_1z_2z_2 = z_1 & = & \beta(z_2) \\ [\beta(a_2),\beta(b_1)] & = & [a_2b_2, a_1b_2] = [a_2,b_2][b_2,a_1] = z_1z_2z_2 = z_1 & = & \beta(z_2) \\ [\beta(a_2),\beta(b_2)] & = & [a_2b_2, a_2b_1b_2] = [a_2,b_1][a_2,b_2][b_2,a_2] = z_2 = (z_1z_2)z_1 & = & \beta(z_1)\beta(z_2) \\ [\beta(a_1),\beta(a_2)] & = & [a_1b_1, a_2b_2] = [a_1,b_2][b_1,a_2] = z_2z_2 & = & 1 \\ [\beta(b_1),\beta(b_2)] & = & [a_1b_2, a_2b_1b_2] = [a_1,b_1][a_1,b_2][b_2,a_2] = z_1z_2(z_1z_2) & = & 1 \end{array}$$

Da also die Bilder $\beta(a_i), \beta(b_j)$ wiederum alle G definierenden Relationen erfüllen, sowie offensichtlich G erzeugen, bestimmt β einen Automorphismus von G. Ebenso die Abbildungen

$$\begin{array}{rlllllllll} \alpha: & a_1 & \mapsto & a_1a_2 \; ; & b_1 & \mapsto & b_1b_2 \; ; & z_1 & \mapsto & z_2 \\ & a_2 & \mapsto & a_1 \; ; & b_2 & \mapsto & b_1 \; ; & z_2 & \mapsto & z_1z_2 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rlllllllll} \mu: & a_1 & \mapsto & b_1 \; ; & b_1 & \mapsto & a_1 \; ; & z_1 & \mapsto & z_1 \\ & a_2 & \mapsto & b_2 \; ; & b_2 & \mapsto & a_2 \; ; & z_2 & \mapsto & z_2 \; , \end{array}$$

wie man leicht nachrechnet. Sei nun U eine charakteristische Untergruppe von G und

$$u = a_1^{m_1} a_2^{m_2} b_1^{n_1} b_2^{n_2} v_0 \in U$$

mit $m_i, n_i \in \{-1, 0, 1\}$ und $v_0 \in Z(G)$. Wir wollen zeigen, daß aus $u \notin Z(G)$ stets $UZ(G) = G$ folgt. Zunächst können wir durch Multiplikation mit den zentral gelegenen Quadraten einsehen, daß

$$u_1 = a_1^{x_1} a_2^{x_2} b_1^{y_1} b_2^{y_2} v_1 \in UZ(G)$$

mit $x_i = |m_i|$, $y_i = |n_i| \in \{0, 1\}$ und $v_1 \in Z(G)$ gilt. Mit u liegt auch u_1 außerhalb $Z(G)$, daher ist mindestens einer der Exponenten x_i, y_i gleich 1. Ist genau einer der Exponenten gleich 1, etwa x_1, so folgt $a_1 \in UZ(G)$ und dann vermöge α^{-1} auch $a_2 \in UZ(G)$, sowie vermöge μ auch $b_1, b_2 \in UZ(G)$, also schlicht $G = UZ(G)$. Dasselbe folgt offensichtlich, wenn genau x_2, y_1 oder y_2 gleich 1 ist.
Sind genau zwei der Exponenten gleich 1, so haben wir jedenfalls

$$\alpha^{-1}(u_1), \beta^{-1}(u_1), \beta^{-1}(\mu(u_1)) \in UZ(G) \; .$$

Darunter ist aber mindestens ein Element, in dem genau ein Erzeugendes a_i, b_i in nichtzentraler Potenz auftritt. Somit folgt wie oben $G = UZ(G)$.
Sind genau drei der Exponenten gleich 1, so betrachten wir $\alpha^{-1}(u_1), \alpha(u_1) \in UZ(G)$. Wie man leicht sieht, treten nun entweder in $\alpha(u_1)$ oder in $\alpha^{-1}(u_1)$ genau zwei Erzeugende a_i, b_j in nichtzentraler Potenz auf. Somit folgt $G = UZ(G)$ wie oben.
Sind alle vier Exponenten gleich 1, so ist $\alpha^{-1}(u_1) = a_1b_1v_2 \in UZ(G)$ mit $v_2 \in Z(G)$, und darum

$$\beta^{-1}(\alpha^{-1}(u_1)) = a_1v_3 \in UZ(G) \; .$$

Also ist $a_1 \in UZ(G)$, mithin vermöge α, α^{-1} und μ auch $a_2, b_1, b_2 \in UZ(G)$, folglich $G = UZ(G)$. Wir finden also in jedem Fall $G = UZ(G)$. Daher ist U zweifellos konjugationsautonom in G. Weil das, wie gezeigt, für jede nichtzentrale charakteristische Untergruppe und für zentrale trivial gilt, ist G charakteristisch – quasiprimitiv.

In der durch (S1) bestimmten Gruppe G betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\kappa: a_1 & \mapsto & a_1a_2\ ; & b_1 & \mapsto & b_1\ ; & z_1 & \mapsto & z_1z_2 \\
a_2 & \mapsto & a_2\ ; & b_2 & \mapsto & b_1b_2\ ; & z_2 & \mapsto & z_2\ ,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\zeta: a_1 & \mapsto & a_2\ ; & b_1 & \mapsto & b_2\ ; & z_1 & \mapsto & z_1z_2 \\
a_2 & \mapsto & a_1\ ; & b_2 & \mapsto & b_1\ ; & z_2 & \mapsto & z_2\ ,
\end{array}$$

μ wie vorher, und

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl@{\qquad}rcl}
\tau: a_1 & \mapsto & a_1\ ; & b_1 & \mapsto & b_2\ ; & z_1 & \mapsto & z_2 \\
a_2 & \mapsto & a_1a_2\ ; & b_2 & \mapsto & b_1\ ; & z_2 & \mapsto & z_1\ ,
\end{array}$$

die – wie man auch hier leicht nachrechnet – Automorphismen von G bestimmen. Ist nun wieder U charakteristisch, aber nicht zentral in G, und $u \in U$, so können wir u schreiben als

$$u = a_1^{x_1}a_2^{x_2}b_1^{y_1}b_2^{y_2}v_0 \in U$$

mit $v_0 \in Z(G)$ und $x_i, y_i \in \{0,1\}$; wobei nicht alle x_i, y_i verschwinden. Ist nur genau einer dieser Exponenten gleich 1, etwa y_2, so haben wir $b_2v_0 \in U$, also $b_2 \in UZ(G)$. Dann folgt vermöge ζ, ζ^{-1} und μ, μ^{-1}, daß auch $a_1, a_2, b_1 \in UZ(G)$, also $G = UZ(G)$ gilt. Ansonsten finden wir für

$$\begin{array}{rclcccl}
u = & a_1a_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(u) & = a_1v_1 & \in U \\
u = & a_1b_1v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(u)u) & = b_2v_2 & \in U \\
u = & a_1b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(u)u) & = b_2v_3 & \in U \\
u = & a_2b_1v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\zeta(u))\zeta(u)) & = b_2v_4 & \in U \\
u = & a_2b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\zeta(u))\zeta(u)) & = b_2v_5 & \in U \\
u = & b_1b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(u) & = b_2v_6 & \in U \\
u = & a_1a_2b_1v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\kappa^{-1}(u))\kappa^{-1}(u)) & = b_2v_7 & \in U \\
u = & a_1a_2b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\kappa^{-1}(\zeta(u)))\kappa^{-1}(\zeta(u))) & = b_2v_8 & \in U \\
u = & a_1b_1b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\zeta(\kappa^{-1}(\zeta(u))))\zeta(\kappa^{-1}(\zeta(u)))) & = b_2v_9 & \in U \\
u = & a_2b_1b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\zeta(\kappa^{-1}(u)))\zeta(\kappa^{-1}(u))) & = b_2v_{10} & \in U \\
u = & a_1a_2b_1b_2v_0 & \Longrightarrow & \kappa^{-1}(\tau(\kappa^{-1}(u))\kappa^{-1}(u)) & = b_2v_{11} & \in U\ ,
\end{array}$$

mit $v_k \in Z(G)$, $k = 1, ..., 11$, woraus in jedem Falle wie oben $G = UZ(G)$ folgt. Mithin ist jede charakteristische Untergruppe autonom in G, folglich G charakteristisch – quasiprimitiv.

Für die durch [15]–(17) bestimmte Gruppe G sehen wir unproblematisch ein, daß die im vorigen Fall [15]–(S1) angegebenen Abbildungen κ, ζ, μ und τ wiederum Automorphismen bestimmen. Ist nun U eine nichtzentrale charakteristische Untergruppe von G und $u \in U \backslash Z(G)$, so können wir u schreiben als

$$u = a_1^{m_1}a_2^{m_2}b_1^{n_1}b_2^{n_2}v_0$$

mit $m_i, n_i \in \{-1, 0, 1\}$, $v_0 \in Z(G)$; wobei nicht alle m_i, n_i verschwinden. Durch Multiplikation mit den zentralen Quadraten der Erzeugenden können wir leicht sehen, daß dann auch

$$u_1 := a_1^{x_1} a_2^{x_2} b_1^{y_1} b_2^{y_2} v_1 \in UZ(G)$$

mit $x_i = |m_i|$, $y_i = |n_i|$ und $v_1 \in Z(G)$ gilt. Ist dies geklärt, führt dieselbe Überlegung mit den analog definierten Automorphismen wie im Fall [15]–(S1) auf $G = UZ(G)$ für jede nichtzentrale charakteristische Untergruppe U von G. Der Unterschied in den Ordnungen der Erzeugenden schlägt sich bei den Ausdrücken der Form „$\kappa^{-1}(\tau(\kappa^{-1}(u))\kappa^{-1}(u)) = b_2 v_k \in U$“ lediglich als Veränderung des zentralen Faktors v_k nieder. Folglich ist auch hier jede charakteristische Untergruppe U von G konjugationsautonom in G, also G charakteristisch – quasiprimitiv.

4.2 K–Quasiprimitivität

Während wir den Begriff der charakteristischen Quasiprimitivität erhielten, indem wir aus der äquivalenten Beschreibung der Quasiprimitivität durch Satz 17, die ja ebensogut als Definition der Quasiprimitivität gelesen werden kann, nicht mehr alle Normalteiler, sondern nur noch charakteristische in die definierende Forderung einbezogen, wollen wir nun versuchen, eine Verallgemeinerung der Quasiprimitivität dadurch zu erhalten, daß wir für die einzelnen Normalteiler nicht mehr die volle Konjugationsautonomie verlangen.

Eine Darstellung $\mathfrak{X}$ einer Gruppe G über einem Körper K heißt *absolut irreduzibel* genau dann, wenn sie über jedem Erweiterungskörper $E \supseteq K$ irreduzibel ist. Der Körper K heißt *Zerfällungskörper* für die Gruppe G genau dann, wenn jede irreduzible Darstellung von G über K absolut irreduzibel ist. Ist K ein Zerfällungskörper für die Gruppe G, κ ein Automorphismus von K und $\mathfrak{X}$ eine irreduzible Darstellung von G über K, so ist auch $\mathfrak{X}^\kappa$ mit $\mathfrak{X}^\kappa(g) := (\mathfrak{X}(g))^\kappa$ eine irreduzible Darstellung von G über K. Ist χ der von $\mathfrak{X}$ induzierte Charakter, so bezeichnen wir mit χ^κ den von $\mathfrak{X}^\kappa$ induzierten.
Für $n := exp(G)$ ist nach einem Satz von Brauer (siehe [11], Theorem (10.3)) $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ mit einer primitiven n-ten Einheitswurzel ε_n ein Zerfällungskörper für G.

46. Definition
Sei G eine Gruppe und $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper. Genau dann, wenn es eine ganze Zahl n und eine primitive n-te Einheitswurzel ε_n, sowie eine Abbildung

$$\mathfrak{z} : \ G \longrightarrow \mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$$

derart gibt, daß

$$\forall N \trianglelefteq G : \forall g \in G : \forall \varphi \in Irr(N) : \ \varphi^g = \varphi^{\mathfrak{z}(g)}$$

*gilt, nennen wir G K–***quasiprimitiv** *(vermöge $\mathfrak{z}$).*

Natürlich wirkt jedes Element $g \in G$ via Konjugation als Permutation $\pi(g)$ auf der G–Menge Γ aller irreduziblen Charaktere aller Normalteiler von G. Dabei gilt eben $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$ für $g_1, g_2 \in G$. Wir haben also in natürlicher Weise einen Homomorphismus π von G in S_Γ gegeben. Analog ruft jedes Element α der Galoisgruppe $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$ eine Permutation $\varrho(\alpha)$ auf Γ hervor, und wir haben den Homomorphismus ϱ von $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$ in S_Γ. Der Homomorphiesatz liefert $G/ker(\pi) \cong \pi(G)$ und $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)/ker(\varrho) \cong \varrho(\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K))$. Die Abbildung $\mathfrak{z}$ aus Definition 46 muß zwar selbst kein Homomorphismus sein, aber je zwei Elementen aus derselben Nebenklasse von G nach $ker(\pi)$ Elemente derselben Nebenklasse von $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$ nach $ker(\varrho)$ zuordnen. Überdies besagt Definition 46 gerade $\forall g \in G : \pi(g) = \varrho(\mathfrak{z}(g))$. Wir haben somit

$$\begin{aligned} G/ker(\pi) &\cong \pi(G) = \varrho(\langle \mathfrak{z}(G) \rangle) \leq \varrho(\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)) \cong \mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)/ker(\varrho) \\ &\cong \langle \mathfrak{z}(G) \rangle ker(\varrho)/ker(\varrho) \ , \end{aligned} \tag{xlv}$$

so daß $\mathfrak{z}$ einen Isomorphismus zwischen $G/ker(\pi)$ und einer Untergruppe von $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)/ker(\varrho)$ vermittelt.

47. Lemma
Sei G eine beliebige Gruppe.
Genau dann existiert ein Körper K derart, daß G K–quasiprimitiv ist, wenn es eine ganze Zahl n und eine Abbildung z von G in ein Vertretersystem der primen Restklassengruppe modulo n gibt, so daß

$$\forall N \trianglelefteq G : \forall g \in G : \forall x \in N : \exists y \in N : \ x^g = (x^{\mathsf{z}(g)})^y \ .$$

Beweis:
Ist G K–quasiprimitiv für einen Körper K, so haben wir eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und eine Abbildung $\mathfrak{z}$, die jedem Element $g \in G$ einen Automorphismus γ von $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)|K \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ zuordnet. Nun ist γ eindeutig bestimmt durch

$$\gamma(\varepsilon_n) = (\varepsilon_n)^{r(\gamma)} \text{ mit } r(\gamma) \in \mathbb{Z}, \ (r(\gamma), n) = 1$$

Wir haben also in natürlicher Weise eine Abbildung $\tilde{r}$ von $\mathcal{G}al(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)|K \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n))$ in die prime Restklassengruppe modulo n, wenn wir für $\tilde{r}(\gamma)$ die Klasse von $r(\gamma)$ nehmen. Ist $N \trianglelefteq G$, $x \in N$ und $g \in G$, so folgt wegen der K–Quasiprimitivität von G

$$\forall \varphi \in Irr(N) : \varphi^g(x) = \varphi^{\mathfrak{z}(g)}(x)$$

Dabei ist bekanntlich (etwa [11], Lemma (2.15) zu entnehmen)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\varphi(1)} (\varepsilon_n)^{k_i} \text{ und } \varphi(x^{r(\gamma)}) = \sum_{i=1}^{\varphi(1)} (\varepsilon_n)^{r(\gamma) k_i} \ ,$$

da alle komplexen Zahlen ε_n mit $\varepsilon_n^{ord(x)} = 1$ Potenzen von ε_n sind. Andrerseits ist auch

$$\varphi^{\mathfrak{z}(g)}(x) = \sum_{i=1}^{\varphi(1)} (\varepsilon_n)^{r(\mathfrak{z}(g))k_i} \ ;$$

also haben wir

$$\forall \varphi \in Irr(N) : \varphi(x^{g^{-1}}) = \varphi^g(x) = \varphi^{\mathfrak{z}(g)}(x) = \varphi(x^{r(\mathfrak{z}(g))}) \ .$$

Da die irreduziblen Charaktere $\varphi \in Irr(N)$ eine Basis der Klassenfunktionen auf N bilden, insbesondere also die Klassen scharf trennen, folgt daraus, daß $x^{g^{-1}}$ in derselben N-Klasse liegt wie $x^{r(\mathfrak{z}(g))}$. Setzen wir $\mathsf{z}(g) := \tilde{r}(\mathfrak{z}(g^{-1}))$, so ist also z eine Abbildung von G in die prime Restklassengruppe modulo n. (Ist speziell $\mathfrak{z}$ ein Homomorphismus, so ist auch z ein Homomorphismus, da auch $\tilde{r}$ ein Homomorphismus ist, und die prime Restklassengruppe abelsch ist.) Offenbar erfüllt z nun die im Lemma formulierte Bedingung.
Umgekehrt ist evident, daß jede Abbildung z_1 von G in die prime Restklassengruppe modulo n eine Abbildung $\mathfrak{z}_1$ von G in $\mathcal{G}al(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)|\mathbb{Q})$ bestimmt. Gilt dabei

$$\forall N \trianglelefteq G : \forall g \in G : \forall x \in N : \exists y \in N : \ x^g = (x^{\mathsf{z}_1(g)})^y$$

und wählen wir K als den Fixkörper der Gruppe $\langle \mathfrak{z}_1(G) \rangle$, so ist G offenbar K–quasiprimitiv vermöge $\mathfrak{z}_1$.

q.e.d.

48. Korollar
Ist eine Gruppe G K–quasiprimitiv für einen Körper K, so ist in G die Normalteilerrelation transitiv.

Beweis:
Sei $M \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq M$. Für beliebiges $x \in N$ und $g \in G$ folgt aus Lemma 47

$$\exists m \in M : \ x^g = (x^m)^r \text{ mit } r \in \mathbb{Z} \ .$$

Wegen $N \trianglelefteq M$ liegt x^m und somit auch x^g in N.

q.e.d.

49. Korollar
Ist eine Gruppe G K–quasiprimitiv für einen Körper K, so ist auch jeder Normalteiler $N \trianglelefteq G$ und jede Faktorgruppe G/N K–quasiprimitiv.

Beweis:
Sei $N \trianglelefteq G$ ein beliebiger Normalteiler.

Nach Korollar 48 ist jeder Normalteiler $M \trianglelefteq N$ auch normal in G. Da G K–quasiprimitiv vermöge einer Abbildung $\mathfrak{z}$ ist, ist in trivialer Weise N K–quasiprimitiv vermöge der auf N eingeschränkten Abbildung $\mathfrak{z}_{|N}$.
Jedem Normalteiler $M/N \trianglelefteq G/N$ entspricht ein Normalteiler $M \trianglelefteq G$ mit $N \trianglelefteq M$. Jedem irreduziblen Charakter $\hat{\chi}$ von M/N entspricht ein irreduzibler Charakter χ von M, in dessen Kern N liegt. Auf diesen wirkt jedes Element von G, also auch die zugehörige Nebenklasse nach N, wie sein Bild unter $\mathfrak{z}$. Wir können daher jeder Nebenklasse nach N das Bild eines ihrer Repräsentanten unter $\mathfrak{z}$ zuordnen, und erhalten so eine Abbildung $\tilde{\mathfrak{z}}$ von G/N in $\mathcal{G}al(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)|K \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n))$, die die K–Quasiprimitivität von G/N vermittelt.

q.e.d.

50. Definition
In einer beliebigen Gruppe G bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}(G)$ den Durchschnitt

$$\mathfrak{C}(G) := \bigcap_{\substack{N \trianglelefteq G, \\ \psi \in Irr(N)}} G_\psi$$

der Trägheitsgruppen aller irreduziblen Charaktere aller Normalteiler in G.

Offenbar ist $\mathfrak{C}(G)$ gerade der Kern unseres eingangs erwähnten Homomorphismus π von G in die Gruppe S_Γ der Permutationen auf der Menge Γ aller irreduziblen Charaktere aller Normalteiler von G. Insofern ist $\mathfrak{C}(G)$ stets ein Normalteiler.
Stets gilt $Z(G) \leq \mathfrak{C}(G)$. Offensichtlich ist eine Gruppe G genau dann quasiprimitiv, wenn $\mathfrak{C}(G) = G$ gilt. Für K–Quasiprimitivität erhalten wir stattdessen

51. Lemma
Ist die Gruppe G K–quasiprimitiv für einen Körper K, so ist $G/\mathfrak{C}(G)$ abelsch und $\mathfrak{C}(G)$ ist quasiprimitiv.

Beweis:
Jeder Normalteiler von $\mathfrak{C}(G)$ ist laut Lemma 48 auch ein Normalteiler von G. Daher fixiert jedes Element von $\mathfrak{C}(G)$ nach Definition jeden Charakter jedes Normalteilers von $\mathfrak{C}(G)$. Folglich ist $\mathfrak{C}(G)$ nach Satz 17 quasiprimitiv.
Es ist $\mathfrak{C}(G) = ker(\pi)$, wenn π der Homomorphismus von G in S_Γ, $\Gamma = \{\chi \in Irr(N) | N \trianglelefteq G\}$ ist, der jedem Element $g \in G$ die durch Konjugation mit g bewirkte Permutation von Γ zuordnet. Für K–quasiprimitive Gruppen G ist daher $G/\mathfrak{C}(G)$ – wie bereits bei (xlv) gesehen – isomorph zu einer Untergruppe einer gewissen Faktorgruppe von $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$. Als solche ist sie sicher abelsch, da $\mathcal{G}al(K(\varepsilon_n)|K)$ abelsch ist.

q.e.d.

Ist eine K–quasiprimitive Gruppe G insbesondere auflösbar, so ist auch $\mathfrak{C}(G)$ auflösbar, daher nach den Lemmata 20 und 51 abelsch. Folglich ist G höchstens zweistufig metabelsch.

Wir betrachten kurz den Spezialfall $K = \mathbb{R}$. Eine Galois-Gruppe $\mathcal{G}al(\mathbb{R}(\varepsilon_n)|\mathbb{R})$ besteht genau aus dem komplexen Konjugationsautomorphismus und der identischen Abbildung. Wir folgern mit Definition 46, daß eine Gruppe G genau dann $\mathbb{R}$–quasiprimitiv ist, wenn

$$\forall g \in G : (\forall N \trianglelefteq G : \forall \chi \in Irr(N) : \chi^g = \overline{\chi}) \;\vee\; (\forall N \trianglelefteq G : \forall \chi \in Irr(N) : \chi^g = \chi)$$

Analog Lemma 47 finden wir, daß eine Gruppe G genau dann $\mathbb{R}$–quasiprimitiv ist, wenn jedes Element von G die Eigenschaft hat, via Konjugation jede Konjugiertenklasse jedes Normalteilers $N \trianglelefteq G$ fest zu lassen, oder jede Klasse jedes Normalteilers in ihre inverse Klasse zu überführen.

Eine weitere Verallgemeinerung der K–Quasiprimitivität kann man z.B. dadurch erhalten, daß man nicht wie in Definition 46 fordert, daß die Gruppenelemente via Konjugation die Menge Γ genau so permutieren wie gewisse Körperautomorphismen, sondern lediglich verlangt, daß jeder Charakter nur in algebraisch konjugierte Charaktere (etwa unter einer gewissen Galois-Gruppe) überführt wird. Zur Verdeutlichung: Für die K–Quasiprimitivität ist es erforderlich, daß zu jedem *Element* $g \in G$ ein Körperautomorphismus $\mathfrak{z}(g)$ existiert, der Γ in gleicher Weise permutiert wie g. In der angeführten Verallgemeinerung genügt es, wenn es zu jedem *Paar* $(\chi, g) \in \Gamma \times G$ einen Körperautomorphismus $\gamma(\chi, g)$ gibt, so daß $\chi^g = \chi^\gamma$ gilt. Es bleibt offen, inwieweit sich diese Eigenschaft einer Gruppe auf Normalteiler und Faktorgruppen überträgt. Jedenfalls greift die Schlußweise, die wir für K–Quasiprimitivität angewandt haben, in dieser Situation nicht mehr.

Spezialisieren wir jedoch auch diese Aussage auf den der $\mathbb{R}$–Quasiprimitivität verwandten Fall, daß jeder Charakter jedes Normalteilers von G bei Konjugation mit Gruppenelementen in sich oder seinen konjugiert–komplexen Charakter übergeht, so erhalten wir aber eine teilweise Analogie zu Lemma 51:

52. Korollar
Ist G eine Gruppe, in der

$$\forall g \in G; N \trianglelefteq G; \chi \in Irr(N) : \chi^g = \chi \vee \chi^g = \overline{\chi} \tag{xlvi}$$

gilt, so ist $G/\mathfrak{C}(G)$ elementarabelsch vom Exponenten 2.

Beweis:
Da ein beliebiges Element $g \in G$ via Konjugation jeden irreduziblen Charakter ψ jedes Normalteilers N von G in sich oder seinen konjugiert–komplexen Charakter überführt, daher insbesondere in gleicher Weise auf $\overline{\psi}$ wie auf ψ wirkt, muß

$g^2 \in \mathfrak{C}(G)$ gelten. Daher hat $G/\mathfrak{C}(G)$ den Exponenten 2.

q.e.d.

Insbesondere gilt dies für Gruppen, die $I\!R$–quasiprimitiv sind. Eine Gruppe, in der (xlvi) gilt, wollen wir *adjungiert quasiprimitiv* nennen. Mit dem berühmten Satz von Feit-Thompson (siehe etwa [11]) sowie den Lemmata 20 und 51 erhalten wir

53. Korollar
Eine Gruppe ungerader Ordnung ist genau dann adjungiert quasiprimitiv, wenn sie abelsch ist.

4.3 Zentralistische Gruppen

In den Ausführungen zur normalen wie auch zur charakteristischen Quasiprimitivität war es oft ein wesentliches Argument, daß in den jeweils betrachteten Gruppen G aus der Kommutativität von Normalteilern (resp. charakteristischen Untergruppen) stets deren zentrale Lage in G folgte. Daher bietet sich der Versuch an, diese Eigenschaft zur Definition einer Abschwächung des Begriffes Quasiprimitivität heranzuziehen:

54. Definition
Eine endliche Gruppe G heiße **zentralistisch** *genau dann, wenn*

1. *jeder abelsche Normalteiler von G im Zentrum von G liegt, und*

2. *aus $M \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq M$ stets $N \trianglelefteq G$ folgt.*

In teilweiser Analogie zu Korollar 19 finden wir trivial

55. Proposition
Ist eine Gruppe G zentralistisch und N ein Normalteiler von G, so ist auch N zentralistisch.

Im Unterschied zur Quasiprimitivität wird Zentralismus jedoch *nicht* notwendig auf Faktorgruppen übertragen:

> Ist H eine nichtabelsch einfache Gruppe, so gilt für einen nichttrivialen Normalteiler K von $Aut(H)$ stets $H \trianglelefteq K$, wobei H als in der üblichen Weise in $Aut(H)$ eingebettet verstanden wird. Mithin hat $Aut(H)$ keine nichttrivialen abelschen Normalteiler. Wählen wir speziell etwa
>
> $$H := {}^2\!A_2(5) \ ,$$
>
> so entnehmen wir [5], daß
>
> $$Aut(H)/H \cong S_3$$

gilt. Daher ist in $Aut(H)$ die Normalteilerrelation transitiv, denn sie ist es in S_3. Folglich ist $Aut({}^2\!A_2(5))$ zentralistisch, aber S_3 ist es sichtlich nicht.

56. Proposition
Sind A und B zentralistische Gruppen, so ist auch $A \times B$ zentralistisch.

Beweis:
Ist N ein abelscher Normalteiler von $A \times B$, so sind

$$\begin{aligned} N_A &:= \{a \in A | \ \exists b \in B : \ ab \in N\} \\ \text{und } N_B &:= \{b \in B | \ \exists a \in A : \ ab \in N\} \end{aligned}$$

abelsche Normalteiler von A bzw. von B, so daß $N_A \leq Z(A)$ und $N_B \leq Z(B)$ gilt. Damit folgt nun

$$N \leq N_A \times N_B \leq Z(A) \times Z(B) = Z(A \times B) \ .$$

Wir müssen also nur noch zeigen, daß in $A \times B$ die Normalteilerrelation transitiv ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil an und wählen $A \times B$ als in beiden Komponenten minimales Gegenbeispiel. Darin sei nun $M \trianglelefteq A \times B$ ein Normalteiler mit $N \trianglelefteq M$ derart, daß N kein Normalteiler von $A \times B$ ist. Damit haben wir natürlich

$$\begin{array}{lccc} & N_A \trianglelefteq M_A \trianglelefteq A & \text{und} & N_B \trianglelefteq M_B \trianglelefteq B \\ \text{also} & N_A \trianglelefteq A & \text{und} & N_B \trianglelefteq B \ . \end{array}$$

Für ein beliebiges Element $b \in N_B$ setzen wir

$$\begin{aligned} sp_N(b) &:= \{a \in A | \ ab \in N\} \\ \text{und analog für beliebiges } a \in N_A & \\ sp_N(a) &:= \{b \in B | \ ab \in N\} \end{aligned}$$

Ist nun $b_0 \in N_B$ und $a_0 \in sp_N(b_0)$, so ist offenbar $a_0(N \cap A) \in sp_N(b_0)$. Andrerseits haben wir mit $a_0, a_1 \in sp_N(b_0)$ stets $a_0 a_1^{-1} \in N \cap A$, so daß also $sp_N(b_0)$ genau eine volle Nebenklasse von N_A nach $N \cap A$ ist. Analog ist $sp_N(a_0)$ stets genau eine volle Nebenklasse von N_B nach $N \cap B$.
Die Minimalität unseres Gegenbeispieles liefert nun $N_A = M_A = A$ und $N_B = M_B = B$. Da N normal in M ist, folgt somit, daß

$$\begin{aligned} \forall a_0 \in N_A = A, \ b_0 \in N_B = B : \ a_0 b_0 \in N \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in A, y \in B : \ (a_0 b_0)^x = a_0^x b_0 \in N \\ &\qquad \text{und } (a_0 b_0)^y = a_0 b_0^y \in N \ , \\ &\Rightarrow \quad a_0^x \in sp_N(b_0) \\ &\qquad \text{und } b_0^y \in sp_N(a_0) \\ &\Rightarrow \quad (a_0(N \cap A))^x = a_0(N \cap A) \\ &\qquad \text{und } (b_0(N \cap B))^y = b_0(N \cap B) \end{aligned}$$

Mithin sind $A/(N \cap A)$ und $B/(N \cap B)$ abelsch, so daß $A' \leq N \cap A$ und $B' \leq N \cap B$ folgt. Das ergibt wiederum

$$\begin{array}{lrcll} \forall a \in A, b \in B: \; ab \in N \Rightarrow \; \forall y \in B: & (ab)^y & = & ab^y & = abb^{-1}y^{-1}by \\ & & & & = ab[b,y] \; \in N, \\ & \text{da } [b,y] \in B' & \subseteq & N \cap B & \subseteq N \end{array}$$

Analog finden wir $(ab)^x \in N$ für $a \in A, b \in B, ab \in N$ und beliebiges $x \in A$. Folglich ist – entgegen unserer Annahme – N normal in $A \times B$.
$\Longrightarrow$ $A \times B$ ist zentralistisch.

q.e.d.

Des weiteren überträgt sich der Beweis von Lemma 20 nahezu wörtlich auf den Fall der zentralistischen Gruppen:

57. Lemma
Eine endliche Gruppe G ist genau dann zentralistisch und auflösbar, wenn sie abelsch ist.

5 Nachbetrachtungen

5.1 Quasinilpotenz

Bereits mit Satz 17 zeichnet sich ab, was spätestens mit Lemma 22 klar zutage tritt – die enge Verwandtschaft der Quasiprimitivität mit der Quasinilpotenz:

58. Definition
Eine Gruppe G heißt quasinilpotent *genau dann, wenn jeder von einem Gruppenelement via Konjugation auf einem Hauptfaktor induzierte Automorphismus ein innerer Automorphismus dieses Hauptfaktors ist.*

In [10] findet sich nämlich der

59. Satz
Eine Gruppe G ist genau dann quasinilpotent, wenn $G/Z^\infty(G)$ vollständig reduzibel mit lauter nichtabelschen Faktoren ist.

Diesem entnehmen wir zusammen mit Lemma 22, daß jede quasiprimitive Gruppe quasinilpotent ist. Offenkundig spezialisiert der Begriff der Quasiprimitivität also den der Quasinilpotenz. Analog zur Nilpotenzklasse im klassischen Sinne bietet es sich hier an, die „Quasinilpotenzklasse" einer quasinilpotenten Gruppe einzuführen:

60. Definition
Eine Gruppe G heißt quasinilpotent von der Klasse k genau dann, wenn sie quasinilpotent ist mit $Z^\infty(G) = Z^k(G)$.

Mit dieser Definition ist also nach Lemma 22 jede quasiprimitive Gruppe quasinilpotent von der Klasse 1. Es fällt nun auf, daß Korollar 23 und damit auch der zweite Teil des Beweises von Satz 25 lediglich von der in Lemma 22 angegebenen Struktur der betrachteten Gruppen – also gerade von der Klasse-1-Quasinilpotenz – Gebrauch machen. Daher überträgt sich die Folgerung: eine Gruppe von der Quasinilpotenzklasse 1 ist das direkte Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen. Daraus folgt mit Satz 25 wiederum, daß jede von der Klasse 1 quasinilpotente Gruppe auch quasiprimitiv ist. Das ergibt

61. Satz
Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn sie quasinilpotent von der Klasse 1 *im Sinne der Definition 60 ist.*

Es erweist sich mit Lemma 34, daß jede charakteristisch-quasiprimitive Gruppe G quasinilpotent von der Klasse 2 ist. Freilich ist charakteristische Quasiprimitivität offenbar nicht äquivalent zur Klasse-2-Quasinilpotenz einer Gruppe G, da an $Z^2(G)$ durchaus nichttriviale Forderungen gestellt werden müssen, wie sie sich etwa aus Korollar 32 und Satz 38 zusammen mit Lemma 36 und Korollar 29 ergeben.
Zentralistische oder schwach quasiprimitive Gruppen lassen sich allerdings nicht in dieser naheliegenden Weise in die Begriffsstruktur der Quasinilpotenz einordnen.

5.2 Permutationsgruppen

Obgleich dies nicht der Ort für eine Genealogie mathematischer Begrifflichkeit ist, darf wohl für wahrscheinlich gelten, daß die Wahl der Bezeichnung „primitiv“ für einen Darstellungsmodul einer Gruppe G, der keine Zerlegung in solche Untermoduln gestattet, die unter G als Ganze permutiert werden, auf den entsprechenden Begriff aus der Theorie der Permutationsgruppen zurückgeht. Die Verwandtschaft ist struktureller Natur, so zeitigen beide Eigenschaften in ihrem jeweiligen Geltungsbereich auch ähnliche Konsequenzen:

- Ist M ein primitiver G-Modul, so zerfällt M über jedem Normalteiler $N \trianglelefteq G$ in äquivalente N-Moduln (siehe etwa [11]).
- Wirkt die Permutationsgruppe G primitiv auf die Ziffernmenge Ω, so wirkt jeder Normalteiler $N \trianglelefteq G$ transitiv auf Ω (siehe etwa [12]).

Für beide Aussagen gilt die Umkehrung nicht, wird aber – als Forderung verstanden – zur Definition einer Verallgemeinerung der Primitivität in beiden Fällen benutzt. In der Darstellungstheorie führt das auf Definition 3, in der Theorie der Permutationsgruppen auf

62. Definition
Eine Gruppe G von Permutationen der Ziffernmenge Ω heißt **quasiprimitiv** *genau dann, wenn jeder nichttriviale Normalteiler $N \trianglelefteq G$ transitiv auf Ω wirkt.*

Einen Struktursatz, der quasiprimitive Permutationsgruppen im Sinne von Definition 62 vollständig beschreibt, beweist Cheryl E. Praeger in [19].

Daß trotz aller Analogien in der Prägung beide Begriffe von Quasiprimitivität bei weitem nicht äquivalent sind, ist formal zu erwarten – in Definition 4 wird von *allen* irreduziblen Darstellungen etwas gefordert, während Definition 62 so zu interpretieren ist, daß die *Existenz* einer (treuen) Permutationsdarstellung mit gewisser Eigenschaft verlangt wird – und anhand z.B. der abelschen Gruppen leicht zu erkennen: Jede abelsche Gruppe ist in trivialer Weise quasiprimitiv im charaktertheoretischen Sinne, während eine abelsche Permutationsgruppe, außer im primzyklischen Fall, sichtlich nicht quasiprimitiv im Sinne von Definition 62 sein kann.

Angenommen, G sei eine im charaktertheoretischen Sinne quasiprimitive Gruppe. Nach Satz 25 ist G direktes Produkt mit vereinigten Zentren aus quasieinfachen Gruppen G_i. Betrachten wir die (nur im Fall, daß G selbst nichtabelsch einfach ist, treue) Permutationsdarstellung, die G via Konjugation auf einer in einem G_i gelegenen nichttrivialen Konjugiertheitsklasse hervorruft, so erkennen wir, daß das zugehörige homomorphe Bild von G – nämlich die einfache Gruppe $G_i/Z(G)$ – quasiprimitiv im Sinne von Definition 62 ist.

Sei G eine Gruppe, die via Konjugation auf jeder ihrer Konjugiertheitsklassen eine im Sinne von Definition 62 quasiprimitive Permutationsgruppe induziert, und sei N ein Normalteiler von G. Insbesondere auf jeder in N gelegenen Konjugiertheitsklasse von G ist dann die via Konjugation durch G induzierte Permutationsgruppe solcherart quasiprimitiv, also $N \trianglelefteq G$ transitiv. Damit ist nun N konjugationsautonom. Weil dies für jeden Normalteiler von G gilt, ist G nach Satz 17 quasiprimitiv im Sinne von Definition 4.

Literatur

[1] **Aschbacher, M.**; Finite group theory, Cambridge University Press 1986, (Cambridge studies in advanced mathematics; 10)

[2] **Bannuscher, W.**; Über Gruppen mit höchstens zwei irreduziblen Charaktergraden, Habilitationsschrift, Universität Rostock, 1989

[3] **Burnside, W.**; Theory of groups of finite order, (1897); 2.edition (1911), unabridged republication Dover edition, New York 1955

[4] **Collins, M.J.**; Representations and characters of finite groups, Cambridge University Press 1990

[5] **Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A., Wilson, R.A.**; Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford 1985

[6] **Feit, W., Seitz, G.M.**; On finite rational groups and related topics, Illinois J.Math. 33 (1989), 103-131

[7] **Gaschütz, W.**; Endliche Gruppen mit treuen absolut irreduziblen Darstellungen, Math.Nachr. 12.Band, Berlin 1954

[8] **Huppert, B.**; Endliche Gruppen I, 2. Nachdruck d. 1. Auflage, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983

[9] **Huppert, B., Blackburn, N.**; Finite Groups II, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1982

[10] **Huppert, B., Blackburn, N.**; Finite Groups III, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1982

[11] **Isaacs, I.M.**; Character Theory of finite groups, New York 1976

[12] **Kochendörffer, R.**; Lehrbuch der Gruppentheorie unter besonderer Berücksichtigung der endlichen Gruppen, Leipzig 1966

[13] **Kurosch, A.G.**; Gruppentheorie I, Akademie-Verlag Berlin 1970

[14] **Kurosch, A.G.**; Gruppentheorie II, Akademie-Verlag Berlin 1972

[15] **Langemann, D.**; Zur Klassifikation von SNC-Gruppen mit elementar abelschem Zentrum, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1995

[16] **Laue, R.**; On Outer Automorphism Groups, Math.Z.148, 177-188 (1976)

[17] **Liermann, H.**; Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist, Inauguraldissertation, 1939, Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ Band 4, 183-207

[18] **Pazderski, G.**; Vorlesung „p-Gruppen“ an der Universität Rostock 1966-68

[19] **Praeger, C.E.**; An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-arc Transitive Graphs, J. London Math. Soc. (2) 47 (1993), 227-239

[20] **Sah, C.-H.**; Existence of normal complements and extensions of characters in finite groups, Illinois J. Math. 6, 282-291 (1962)

[21] **Sah, C.-H.**; Automorphisms of Finite Groups, Journal of Algebra 10, 47-68 (1968)

[22] **Sah, C.-H.**; Automorphisms of Finite Groups: Addendum, Journal of Algebra 44, 573-575 (1977)

[23] **Serre, J.-P.**; Lineare Darstellungen endlicher Gruppen, Akademie-Verlag Berlin 1972

[24] **Stonehewer, S.E.**; Automorphisms of Locally Nilpotent FC-Groups, Math.Z.148, 85-88 (1976)

[25] **Zassenhaus, H.**; Lehrbuch der Gruppentheorie (I), Verlag B.G.Teubner, Leipzig und Berlin 1937

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur angefertigt zu haben.

Rostock, den 31. Januar 1996

Thesen zur Diplomarbeit

1. Es wird der Begriff der Quasiprimitivität einer endlichen Gruppe definiert.
   Definition.
   Ein irreduzibler Charakter χ einer Gruppe G heißt *quasiprimitiv* genau dann, wenn er über jedem Normalteiler von G homogen zerfällt.
   Eine endliche Gruppe G heißt *quasiprimitiv* genau dann, wenn alle irreduziblen Charaktere von G quasiprimitiv sind.

2. Es gilt: Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn für jeden Normalteiler N von G je zwei Elemente von N, die unter G konjugiert sind, bereits unter N konjugiert sind.

3. Ist eine Gruppe G quasiprimitiv, so ist in G die Normalteilerrelation transitiv. Quasiprimitivität überträgt sich auf Normalteiler, Faktorgruppen und direkte Produkte.

4. **Satz:**
   Eine endliche Gruppe G ist genau dann quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt mit vereinigten Zentren von quasieinfachen Gruppen ist.

5. Es werden Verallgemeinerungen des Begriffes der Quasiprimitivität betrachtet. Am ausführlichsten wird dabei die charakteristische Quasiprimitivität behandelt.
   Definition.
   Eine Gruppe G deren sämtliche irreduzible Charaktere über allen charakteristischen Untergruppen homogen zerfallen, heiße *charakteristisch - quasiprimitiv.*

6. Besondere Beachtung finden auflösbare Gruppen.
   Ist eine Gruppe G charakteristisch - quasiprimitiv und auflösbar, so ist ihre Kommutatorgruppe G' elementarabelsch und liegt im Zentrum.

   Da charakteristisch - quasiprimitive auflösbare Gruppen folglich nilpotent sind, kommt es darauf an, charakteristisch - quasiprimitive p-Gruppen zu bestimmen. Es wird der Satz über die Charakterisierung der p-Gruppen mit primzyklischer Kommutatorgruppe von H. Liermann [1]) und G. Pazderski [2]) verwendet, um die charakteristisch - quasiprimitiven p-Gruppen mit zyklischer Kommutatorgruppe vollständig zu bestimmen:

7. **Satz.**
   Eine p-Gruppe G mit $|G'| = p > 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ
   $$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_p$$
   in der Notation nach [2]) ist.
   Eine 2-Gruppe G mit $|G'| = 2$ ist genau dann charakteristisch-quasiprimitiv, wenn sie das direkte Produkt einer abelschen Gruppe und einer Gruppe vom Typ
   $$\begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \\ m_1, & ..., & m_{t-1} & ; & \underline{2} \end{pmatrix}_2 \text{ oder vom Typ } \begin{pmatrix} m_1, & ..., & m_t & & \\ m_1, & ..., & m_t & ; & \underline{d} \end{pmatrix}_2$$
   ist, wobei im letzten Fall bei $d = 1$ entweder für keinen oder für mindestens zwei Indizes i gilt $m_i = 1$.

8. **Satz.**
   Jede charakteristisch-quasiprimitive p-Gruppe G ist das direkte Produkt mit vereinigten Zentren aus dem Erzeugnis H aller Elemente der Breiten 0 und 1 in G und dessen Zentralisator $C_G(H)$.
   Dabei ist
   $$H = Z^*_{c_1} \curlyvee \cdots \curlyvee Z^*_{c_r}$$
   das direkte Produkt mit vereinigten Zentren charakteristisch-quasiprimitiver Untergruppen $Z^*_{c_i}$ von G mit jeweils primzyklischer Kommutatorgruppe, und $C_G(H)$ enthält kein Element der Breite 1.

   Es werden Beispiele für nichtabelsche charakteristisch - quasiprimitive p-Gruppen angegeben, die keine Elemente der Breite 1 enthalten.

9. In Auswertung der Arbeit [3]) von D. Langemann werden die charakteristisch – quasiprimitiven SNC–Gruppen unter den p-Gruppen der Kommutatorgruppenordnung p^2 mit elementarabelschem Zentrum und dem Zentrumsindex p^4 determiniert.

[1]) **Liermann, H.**; Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist, Inauguraldissertation, 1939, Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ Band 4, 183-207
[2]) **Pazderski, G.**; Vorlesung „p–Gruppen“ an der Universität Rostock 1966-68
[3]) **Langemann, D.**; Zur Klassifikation von SNC-Gruppen mit elementar abelschem Zentrum, Diplomarbeit, Universität Rostock, 1995