Ausarbeitung Proseminar-Vortrag Mengentheoretische Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

Eine Ausarbeitung von Sebastian Bugge und Konrad Flindt.

1 Einleitung

Den Beginn der Mengenlehre verzeichnen wir im 19. Jahrhundert. Es war der deutsche Mathematiker Georg Cantor, der in den 1870er Jahren erstmals eine Mengendefinition lieferte:

Eine Menge sei eine „Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Cantor befasste sich insbesondere mit der Mächtigkeit (oder Kardinalität) von Mengen. Dabei ging er speziell auf solche Mengen ein, die unendlich viele Elemente enthielten. Die Begriffe *abzählbar*, für Mengen der gleichen Mächtigkeit wie die natürlichen Zahlen, und *überbzählbar*, für solche, die eine größere Mächtigkeit besitzen, gehen ebenfalls auf den Begründer der Mengenlehre zurück. Cantor war Vorreiter in diesem „neuen“ Gebiet der Mathematik - so bewies er beispielsweise bald, dass die rationalen Zahlen die gleiche Mächtigkeit haben wie die natürlichen, was zunächst nicht sonderlich einleuchtend erscheint.

Die salopp formulierte Definition der Menge machte allerdings schon bald Probleme. Kurz nach der Jahrhundertwende entdeckte Bertrand Russell einen Widerspruch in der auf Cantors Mengenlehre aufbauenden Arbeit Gottlob Freges, die sogenannte *Russellsche Antinomie*. Mit einem System, in dem eine logische Aussage gleichermaßen wahr als auch falsch sein kann, wollte natürlich keiner arbeiten. So wurde der Ruf nach einer Axiomatik laut, die die Mengenlehre Cantors von Widersprüchen befreien sollte. David Hilbert startete in den 1920ern mit seinem Programm den Versuch, die Forschung in diese Richtung zu lenken.

Ernst Zermelo schuf ein solches Axiomensystem, das später noch von Abraham Fraenkel ergänzt wurde. Das **Z**ermelo-**F**raenkel-System von 1930 hat bis heute Bestand, obwohl es damals zunächst auf Ablehnung einiger Mathematiker stieß. Es beseitigte die Antinomien zumindest bei endlichen Mengen. Kurt Gödel bewies 1931 mit seinem Unvollständigkeitssatz, dass die vollkommene Widerpruchsfreiheit eines solchen Systems gar nicht möglich ist. Danach muss es in einem solchen System also Aussagen geben, die weder bewiesen, noch widerlegt werden können.

Auch die Herren **N**eumann und **B**ernays stellten ein Axiomensystem auf, das **G**ödel 1940 noch erweiterte. Im Unterschied zum ZF-System kam es sogar mit endlich vielen Axiomen aus. Diese Axiomatik, kurz NBG genannt, wollen wir im Folgenden darstellen und erläutern.

2 Axiomatik

Das folgende Axiomensystem basiert auf den Arbeiten der Mathematiker John von Neumann, Paul Bernays und Kurt Gödel und wird dementsprechend als Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre oder kurz NBG bezeichnet. Es ist im wesentlichen zum weiterverbreiteten Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem äquivalent. Der größte Unterschied besteht darin, dass NBG auf dem Klassenbegriff beruht und Mengen als eine besondere Art von Klassen definiert.
Die undefinierten Terme dieser Axiomatik sind „Klasse“ und die binäre Beziehung „$\in$“ zwischen Klassen. Wir setzen voraus, dass die Beziehung $A \in B$ für zwei Klassen A, B entweder wahr oder falsch ist.

Definition 2.1. Eine Klasse A heißt *Teilklasse* der Klasse B genau dann, wenn $\forall x : x \in A \Rightarrow B$ gilt. Wir schreiben dafür kurz $A \subseteq B$. Zwei Klassen A und B heißen genau dann gleich, falls $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ gilt und hierfür schreiben wir abkürzend $A = B$.

Definition 2.2. (Was ist eigentlich eine Menge?)
Eine Klasse M heißt genau dann eine Menge, wenn eine Klasse $\mathscr{A}$ existiert mit $M \in \mathscr{A}$. Klassen, die selbst in keiner anderen Klasse als Element vorkommen, sind demnach keine Mengen. Um das deutlich zu machen nennt man diese *echten Klassen* auch manchmal *Unmengen*. Ein Beispiel für eine echte Klasse ist etwa die sogenannte „Russellsche Klasse“ $\{x : x \notin x\}$ benannt nach ihrem „Entdecker“, dem britischen Mathematiker und Philosophen Bertrand Russell, sie taucht z.B. im berühmten „Barbier-Paradoxon“ auf.

Axiom I: (Substitution)
Sei A eine Klasse. $(x \in A) \wedge (y = x) \Rightarrow y \in A$

Axiom II: (Klassenbildung)
Für jede Aussageform p(x), in der der nur über Mengenvariablen quantifiziert wird und in der die Klassenvariable A nicht vorkommt, existiert eine Klasse A, deren Elemente genau diejenigen Mengen x sind, für die p(x) wahr ist, also

$$(x \in A) \Longleftrightarrow (x \text{ ist Menge}) \wedge p(x)$$

Bemerkung 2.2.1. Dieses Axiom gestattet es uns einige Begriffe und Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Cartesisches Produkt, Relation und Abbildung), die wir im zweiten Kapitel für Mengen einführen werden, auch auf Klassen zu übertragen.

Bemerkung 2.2.2. Außerdem löst sich hier die Russellsche Antimonie insofern auf, als dass wir sehen, dass $\{x : x \notin x\}$ eine Klasse ist (aber keine Menge). Zudem erlaubt uns Axiom II dann auch die sogenannte „Allklasse“ $\{x : x = x\}$ und die „leere **Klasse**“ $\emptyset := \{x : x \neq x\}$ einzuführen, wobei x hier immer eine Menge bezeichnen soll. Die leere Klasse ist Gegenstand des nächsten Axioms.

Axiom III: (Die leere Menge)
$\emptyset$ ist eine Menge.

Bemerkung 2.2.3. Für all diejenigen, die sich immer schon gefragt haben, warum denn nun die leere Menge unbedingt eine Menge sein soll, denn eigentlich widerspricht sie unserer naiven Auffasung vom Begriff der Menge als einer „Ansammlung von Objekten“ oder dergleichen, weil in ihr ja nunmal „nichts drin ist“: Dieses Axiom sichert uns zu, dass es überhaupt eine Menge gibt. Ohne es würden wir zwar Mengenlehre betreiben können, aber dann würden all unsere Erkenntnisse auch irgendwie in der Luft hängen, weil - nun ja - wir über Dinge „sprechen“, die es gar nicht gibt!

Axiom IV: (Mengenpaare)
Wenn A und B verschiedene Mengen sind, so ist $M := \{x|\ (x = A) \vee (x = B)\}$ eine Menge. Für sie schreibt man auch $\{A, B\}$.

Axiom V: (Mengenvereinigung)
Ist $\mathscr{A}$ eine Menge, so ist

$$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A := \{x | \exists A \in \mathscr{A} : x \in A\}$$

eine Menge.

Bemerkung 2.2.4. Mit Axiom IV und V können wir jetzt auch unsere gewohnte Vereinigung zweier Mengen A und B definieren. Nämlich als $A \cup B := \bigcup_{T \in \{A,B\}} T$.

Axiom VI: (Einsetzung)
Ist A eine Menge und $f : A \to \mathscr{A}$ eine Abbildung, dann ist $f(A)$ eine Menge.

Axiom VII: (Schnittmenge)
Ist A eine Menge, so ist bei jeder Klasse $\mathscr{A}$ auch $A \cap \mathscr{A}$ eine Menge.

Bemerkung 2.2.5. Für eine Menge A und eine Aussageform p, in der höchstens über Mengenvariablen quantifiziert wird, können wir bereits nach Axiom II die Klasse(!) $\{x | x \in A \wedge p(x)\}$ bilden. Axiom VII versichert uns jetzt, dass diese Klasse auch eine Menge ist. Die Formulierung „x ist Menge“ ist an dieser Stelle überflüssig, da x durch die Forderung $x \in A$ automatisch nach Definition eine Menge ist. Wir können nun also Teilmengen einer gegebenen Menge A durch Aussonderung mittels p definieren. Es kommt aber noch besser! Für eine Menge $\mathscr{A}$ können wir ja bereits nach Axiom V die Menge $V := \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ bilden. Als Aussageform $p(x)$ wählen wir jetzt $x \in A : \forall A \in \mathscr{A}$ und erhalten so, dass der Schnitt über alle $A \in \mathscr{A}$, also $\bigcap_{A \in \mathscr{A}} A := \{x \in V | p(x)\}$ eine Menge ist.

Axiom VIII: (Potenzmenge)
Ist A eine Menge, dann ist auch die Potenzmenge $\mathfrak{P}(A) := \{M | M \text{ ist Menge} \wedge M \subseteq A\}$ eine Menge.

Bemerkung 2.2.6. Diese Definition der Potenzmenge ist laut Axiom II möglich. An dieser Stelle mache man sich klar, dass für jede Menge A auch $\{A\}$ eine Menge ist: Gilt $A = \emptyset$, so ist dies einleuchtend, denn nach Axiom III ist die leere Menge eine Menge. Axiom XIII liefert dann

$\mathfrak{P}(\emptyset) = \{M \mid M \text{ ist Menge } \wedge M \subseteq \emptyset\}$. Da die leere Menge Teilmenge jeder Menge ist, ist $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ eine Menge. Gilt jedoch $A \neq \emptyset$, so ist nach Axiom IV $\{A, \emptyset\}$ eine Menge. Sei nun $B := \{x \mid x = A\}$ eine Klasse. Dann ist nach Axiom VII $\{A, \emptyset\} \cap B = \{A\}$ eine Menge.

Axiom IX: (Atome)
Jede nichtleere Menge A enthält ein Element $a \in A$ mit $a \cap A = \emptyset$.

Das hört sich zunächst erstmal seltsam an. Anhand der folgenden Konsequenzen daraus, lässt sich aber erschließen, warum dieses Axiom von Bedeutung ist:

Satz 2.3.

(i) *Keine Menge ist Element von sich selbst.*

(ii) *Seien A, B Mengen. Dann kann nicht $A \in B$ und $B \in A$ gelten.*

Beweis.

(i) Für die leere Menge ist das klar. Sei A also nichtleer und es gelte $A \in A$. Dann ist nach Axiom VIII auch $\{A\}$ eine Menge. Da allerdings A ein Element von A ist, gilt aber $\{A\} \cap A = A$, also enthält A keine Atome. Widerspruch!

(ii) Auch diese Aussage ist für leere Mengen klar. Betrachte also nichtleere Mengen A, B. Dann ist nach Axiom IV aber $\{A, B\}$ ebenfalls eine Menge, die wie in (i) nur A und B als Elemente enthält und keine Atome.

$\square$

Ab hier ist nun auch klar, dass es sich bei der Russellschen Klasse um eine echte Klasse handelt und nicht um eine Menge!

Axiom X: (Unendlichkeit)
Es gibt eine Menge A mit folgenden Eigenschaften:

- $\emptyset \in A$
- Wenn $a \in A$ gilt, dann auch $a \cup \{a\} \in A$.

Bemerkung 2.3.1. Axiom X ermöglicht es uns, die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Menge zu definieren. Hierzu betrachte man eine Menge A, die die Eigenschaften aus Axiom X besitzt. Definiert man $\mathfrak{B} := \{B \in \mathfrak{P}(A) \mid B \text{ hat Eigenschaften wie in Axiom X}\}$, so ist $N := \bigcap_{B \in \mathfrak{B}} B$ nach Axiom V ebenfalls eine Menge und besitzt offensichtlich alle Eigenschaften aus Axiom X. Nennen wir dann $x \cup \{x\}$ den Nachfolger von x $\forall x \in N$, können wir $\emptyset$ als 0 bezeichnen und erhalten $\{\emptyset\}$ als 1, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ als 2 und so weiter ...

Axiom XI: (Das Auswahlaxiom)
Zu jeder nichtleeren Menge $\mathscr{A}$ von nichtleeren Mengen existiert eine Funktion $f : \mathscr{A} \to \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$, für die $\forall A \in \mathscr{A} : f(A) \in A$ gilt.

3 Relationen und Abbildungen

Definition 3.1.

(1) Für beliebige Elemente x, y nennen wir $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ *geordnetes Paar*.

(2) Seien X, Y Mengen. Dann nennen wir $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$ das *Cartesische Produkt*.

(3) Eine Teilmenge R des Cartesischen Produkts $R \subseteq X \times Y$ heißt *Relation* zwischen X und Y. Seien $x \in X$ und $y \in Y$. Dann sagen wir „x steht in der Relation R zu y“ genau dann, wenn $(x, y) \in R$.

(4) Für eine Relation R ist durch $\{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\} =: R^{-1}$ ebenfalls eine Relation definiert. Diese heißt *inverse Relation* zu R.

(5) Seien $R \subseteq X \times Y$ und $S \subseteq Y \times Z$ Relationen. So ist ihre *Komposition* definiert als $S \circ R := \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$

(6) Eine Relation $f \subseteq X \times Y$ heißt *Abbildung* von X in Y (oder *Funktion* von X nach Y), falls es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ gibt mit $(x, y) \in f$. Wir schreiben künftig $f : X \to Y$ und nennen X den Definitions- und Y den Wertebreich von f. Für $(x, y) \in f$ wollen wir abkürzend $y = f(x)$ schreiben.

(7) Seien $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$ gegeben. Dann ist $f_{|A} := f \cap (A \times Y)$ eine Abbildung von A nach Y und heißt *Einschränkung* von f auf A.

(8) Ist umgekehrt $A \subseteq X$ und $g : A \to Y$ gegeben, so heißt jede Abbildung $f : X \to Y$ mit $f_{|A} = g$ eine *Fortsetzung* von g auf X.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn $f \circ f^{-1} = id_Y$ gilt. Sie ist genau dann injektiv, wenn $f^{-1} \circ f = id_X$ gilt. Dabei bezeichnet id die identische Abbildung und f^{-1} die inverse **Relation** von f.

Definition 3.2.

(1) Für eine Menge (oder Klasse) X heißt eine Funktion $f : I \to X$ *indizierende Abbildung*. Die Menge (oder Klasse) I bezeichnet man dann als *Indexmenge* (bzw. *-klasse*).
Anstelle von $f(i)$ schreibt man einfach x_i und nennt x_i das *Glied der indizierten Familie* von Elementen aus X zum Index i. Für $f : I \to X$ schreibt man auch $(x_i)_{i\in I}$, denn oft ist die indizierende Funktion uninteressant oder unmittelbar klar. Ist speziell $I = \mathbb{N}$, spricht man von einer *Folge*.

(2) Ist $X = \mathfrak{P}(Y)$, so nennt man eine Familie von Elementen aus X ein *indiziertes Mengensystem*. Jedes $M \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ lässt sich in einfacher Weise als indiziertes Mengensystem auffassen, indem wir $I = M$ und $f = id_M$ wählen.

(3) Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein indiziertes Mengensystem. Dann nennen wir

$$\prod_{i\in I} := \{x : I \to \bigcup_{i\in I} M_i | \forall i \in I : x(i) \in M_i\}$$

das *Cartesische Produkt* über alle M_i.

Durch $p_j(x) := x_j \ \forall x \in \prod_{i\in I} M_i$ wird für jedes feste $j \in I$ eine Funktion $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ definiert. Diese nennen wir *j-te kanonische Projektion*. Sie ist surjektiv, falls $M_i \neq \emptyset \ \forall i \in I$ gilt, da $A \times \emptyset = \emptyset$ für jede Menge A gilt.

4 Ordnungsrelationen

Definition 4.1.

(1) Sei X eine Menge. Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt *(reflexive) Halbordnung* auf X genau dann, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

[I] sie ist reflexiv, d.h. $\forall x \in X : (x, x) \in R$

[II] sie ist transitiv, d.h. $\forall x, y, z \in X : (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

[III] sie ist antisymmetrisch, d.h. $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow (x = y)$

(2) Ist R eine *(reflexive) Halbordnung* und zusätzlich noch linear, d.h.

[IV] $\forall x, y \in X : (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$,

dann heißt R eine *(reflexive) Ordnung* oder auch *totale Ordnung* auf X.

(3) Sei X eine Menge, auf der eine Halbordnung (bzw. eine totale Ordnung) $\preceq$ definiert ist. Dann nennen wir das Paar $(X, \preceq)$ eine *halbgeordnete Menge* (bzw. *total geordnete Menge*).

Beispiel 4.1.1.

(i) Die übliche „kleinergleich-Relation“ definiert auf $\mathbb{R}$ eine totale Ordnung. Die Inklusionsrelation $\subseteq$ definiert auf $\mathfrak{P}(M)$ eine Halbordnung, wobei M eine Menge mit mehr als einem Element ist. Falls M nur ein Element hat, oder die leere Menge ist, dann wird durch $\subseteq$ sogar eine totale Ordnung definiert.

(ii) Sei $M := \{a, b, c\}$. Dann gilt $\mathfrak{P}(M) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Wegen $\{a\} \nsubseteq \{b\} \wedge \{b\} \nsubseteq \{a\}$ ist $(\mathfrak{P}(M), \subseteq)$ nicht total geordnet. Jedoch ist beispielsweise die Teilmenge $M_1 := \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ total geordnet. Solche Teilmengen in einer halbgeordneten Menge nennt man auch *Ketten*.

Definition 4.2.

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie reflexiv, transitiv und *symmetrisch* ist. Letzteres heißt, dass

$$\forall x, y \in X : (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

gilt.

Definition 4.3.

Ist R eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$, so nennen wir die Menge

$$[x]_R := \{z \in X \mid (x, z) \in R\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x (bzgl. R). Wegen der Reflexivität von R gilt $\bigcup_{x \in X}[x]_R = X$ für jede Äquivalenzrelation R.

Weiterhin gilt für $x, y \in X$ entweder $[x]_R = [y]_R$ oder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Um das einzusehen, nehmen wir an, es gelte $[x]_R \neq [y]_R$, d.h. insbesondere $(x, y) \notin R$. Außerdem existiere ein $z \in [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Dann gilt $(x, z) \in R$ und $(y, z) \in R$. Wegen der Symmetrie von R gilt aber auch $(z, y) \in R$. Da R transitiv ist, folgt damit sofort $(x, y) \in R$, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht.

X zerfällt somit in eine Vereinigung paarweise disjunkter Teilmengen. Eine solche Darstellung von X nennt man auch *Zerlegung* von X. Die einzelnen Äquivalenzklassen heißen die *Zerlegungskomponenten*. Ist umgekehrt eine Zerlegung von X gegeben, kann man ganz einfach eine Äquivalenzrelation R auf X definieren, in dem man taschenspielermäßig

$$(x, y) \in R \Longleftrightarrow x \text{ und y sind in derselben Zerlegungskomponente enthalten}$$

fordert.

Die Menge der Äquivalenzklassen von X bzgl. R heißt *Quotientenmenge* von X nach R und wird mit X/R bezeichnet.

Definition 4.4.

(1) Für zwei halbgeordnete Mengen $(M, \preceq)$ und $(M', \preceq')$ heißt eine Abbildung $f : M \to M'$ genau dann *isoton*, wenn $x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq' f(y)$ gilt, f die Ordnung also erhält.

(2) Ist die isotone Abbildung $f : M \to M'$ bijektiv und die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls isoton, dann nennt man f (und natürlich auch f^{-1}) einen *Ordnungsisomorphismus*. Die halbgeordneten Mengen $(M, \preceq)$ und $(M', \preceq')$ heißen dementsprechend *ordnungsisomorph*.

(3) Sei $(M, \preceq)$ eine halbgeordnete Menge und $T \subseteq M$, dann heißt

(a) ein Element $a \in M$ obere (bzw. untere) Schranke von T genau dann, wenn $\forall x \in T : x \preceq a$ (bzw. $a \preceq x$)

(b) eine kleinste obere Schranke *Supremum* und eine größte untere Schranke *Infimum*.

(c) ein Element $m \in T$ maximal (bzw. minimal) genau dan, wenn $x \in T \wedge\ m \preceq x$ (bzw. $x \preceq m$) $\Rightarrow x = m$.

Bemerkung 4.4.1. In einer total geordneten Menge gibt es immer höchstens ein maximales und ein minimales Element. In halbgeordneten Mengen kann es dagegen mehrere geben.

Beispiel 4.4.2. Wir betrachten wieder die Menge M von vorhin und $M_2 := \mathfrak{P}(M) \setminus \{\{\emptyset\}, \{a, b, c\}\}$ dann sind $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ minimale Elemente und $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ maximale Element.

(4) Eine total geordnete Menge, in der jede nichtleere Teilmenge ein minimales Element besitzt, heißt *wohlgeordnet*. Die entsprechende Ordnung nennen wir *Wohlordnung*.

Beispiel 4.4.3. $\mathbb{N}$ ist mit der üblichen „kleinergleich-Relation" wohlgeordnet. $\mathbb{R}$ jedoch nicht.

Satz 4.5. *Für eine wohlgeordnete Menge $(M, \preceq)$ gilt das* Prinzip der transfiniten Induktion*, d.h. für eine Aussage $E(x)$ mit den Eigenschaften*

(1) $E(m_0)$ ist wahr für das minimale Element m_0 von M bzgl. $\preceq$.

(2) Für beliebiges $m \in M$ folgt aus $E(m')$ wahr $\forall m' \preceq m$, $m' \neq m$, dass auch $E(m)$ wahr ist.

ist $E(m)$ wahr $\forall m \in M$.

Beweis.(„Prinzip der kleinsten Verbrecher").

Angenommen, $E(m)$ wäre nicht für alle $m \in M$ wahr. Dann wäre $V := \{m \in M : E(m)$ ist falsch$\}$, die Menge aller „Verbrecher", nichtleer. Wegen $V \subseteq M$ und der Voraussetzung, dass M durch $\preceq$ wohlgeordnet ist, existiert ein minimales Element m_v von V. Nach (1) gilt $m_v \neq m_0$ und wegen (2) folgt, dass $E(m)$ wahr ist für alle $m \in M$ mit $m \preceq m_v$, $m \neq m_v$ und somit wiederum wegen (2), dass auch $E(m_v)$ wahr ist. Widerspruch! □

5 Sätze im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom

In diesem Abschnitt wollen wir uns speziell auf das Auswahlaxiom konzentrieren und einige dazu äquivalente Sätze vorstellen. Aufgrund seiner herausgehobenen Stellung und der damit verbundenen historischen Berühmtheit wollen wir es hier noch einmal gesondert anführen. Nicht unerwähnt lassen wollen wir auch, dass das von uns hier gebrauchte Axiomensystem von v.-Neumann-Bernays-Gödel nicht das einzige zur Axiomatisierung einer Mengenlehre ist. Das nach den Mathematikern Ernst Zermelo und Adolf Abraham Fraenkel benannte ZF-System ist sogar weiter verbreitet. Das Auswahlaxiom nimmt aber auch hier eine besondere Stellung ein und so spricht man auch oft vom ZFC-System (also ZF mit dem Auswahlaxiom), wobei das C für das Axiom of **C**hoice steht und nicht etwa, wie man vielleicht im ersten Moment glaubt, für den Vater der modernen Mengenlehre, den deutschen Mathematiker Georg Cantor. Kommen wir nun zum Auswahlaxiom, in seiner für den mathematischen Hausgebrauch gebräuchlichsten Formulierung.

Das Auswahlaxiom (AC) Fassung I
Zu jeder nichtleeren Menge $\mathscr{A}$ von nichtleeren Mengen existiert eine Funktion
$f : \mathscr{A} \to \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$, für die $\forall A \in \mathscr{A} : f(A) \in A$ gilt.

Außerdem noch in seiner ebenfalls äquivalenten Formulierung:

Das Auswahlaxiom (AC) Fassung II
Zu jeder nichtleeren Menge $\mathscr{A}$ von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen existiert eine Menge, die genau ein Element aus jedem Element von $\mathscr{A}$ enthält.

Nicht minder berühmt ist das Lemma von Zorn. Der Mann mit dem etwas martialischen Namen, den dieses Lemma trägt, war übrigens der deutsche Mathematiker Max August Zorn, der es 1935 entdeckte. Zwar wurde es bereits 13 Jahre früher vom polnischen Mathematiker Kazimierz Kuratowski entdeckt, von Zorn dann aber unabhängig davon bewiesen. Manchmal ist die Namensgebung in der Mathematik eben nicht ganz fair, aber dafür hat das Lemma jetzt wenigstens einen sehr klangvollen Namen.

Zorn'sches Lemma
Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Wenn jede total geordnete Teilmenge T von M eine obere Schranke in M hat, dann gibt es zu jedem $x \in M$ ein in M maximales Element x' mit $x \leq x'$.

Weiter geht es mit dem Wohlordnungssatz und jetzt könnte der ein oder andere sich vielleicht doch ganz schön wundern, dass dieser zum Auswahlaxiom äquivalent ist. Denn wenn wir uns das Auswahlaxiom so ansehen, springt uns nicht gleich auf den ersten Blick ein Argument ins Gesicht, das uns an ihm zweifeln lässt. Es ist schön anschaulich und man ist geneigt zu sagen: „Warum sollte ich das nicht machen können? Spricht doch nichts dagegen!“. Sieht man sich jetzt aber gleich den Wohlordnungssatz an, gerät man doch etwas ins Stutzen. Denn dieser ist längst nicht so „anschaulich klar“ wie das Auswahlaxiom. Interessant ist außerdem, dass man bis heute nicht mal eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$ angeben kann, obwohl wir „wissen“, dass es eine geben muss. In diesem Zusammenhang sei nochmal darauf hingewiesen, dass wir hier die ganze Zeit über das Auswahl**axiom** und seine „Vettern“ sprechen. Es ist ja keineswegs so, dass unsere Axiome irgendwie aus der Wirklichkeit (am Ende noch empirisch oder sonstwie) ableitbar wären. Wir benutzen sie, um eine fundierte Grundlegung der Mathematik zu erhalten und das Auswahlaxiom hat sich dabei als ziemlich nützlich erwiesen. Gleichwohl gibt es bestimmt auch genug kluge und gute Argumente gegen unser Auswahlaxiom, die uns dann zeigen, dass wir hier ganz üble und böse Paradoxien produzieren, wie z.B. den Satz von Banach und Tarski, für dessen Beweis man das Auswahlaxiom benötigt und der dem ein oder anderen vielleicht auch geläufig ist. Das ist nämlich derjenige, der (ganz salopp formuliert) sagt, dass ich einen Apfel in viele kleine Teile zerhacken und aus diesen dann zwei Äpfel zusammensetzen kann. Man muss schon lange suchen, bis man eine Geschichte findet, in der ein einziger Apfel ähnlich viel Ärger verursacht hat. Jetzt aber endlich, wie versprochen, der

Wohlordnungssatz von Zermelo.
Zu jeder Menge M gibt es eine Wohlordnung $\leq$ auf M.

Zu guter Letzt noch der Hausdorff’sche Maximalitätssatz, manchmal auch Maximalkettensatz genannt. Benannt ist er nach dem deutschen Mathematiker Felix Hausdorff, der pseudonym auch literarisch und philosophisch tätig war.

Haussdorff’scher Maximalitätssatz
Jede nichtleere halbgeordnete Menge $(M, \leq)$ enthält mindestens eine maximale total geordnete Teilmenge. Eine Teilmenge T heißt dabei genau dann maximal total geordnete Teilmenge, wenn ihr kein Element aus M mehr hinzugefügt werden kann, ohne die totale Ordnung zu zerstören. Oder anders gesagt: Wenn keine total geordnete Teilmenge T' existiert mit $T \subset T'$.

Um die Äquivalenz aller hier genannten Sätze zu zeigen, wollen wir die folgende Implikationskette beweisen. AC $\Rightarrow$ Zorn $\Rightarrow$ Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ AC. Seperat zeigen wir noch die zwei Äquivalenzen AC erste Fassung $\Longleftrightarrow$ AC zweite Fassung und Zorn $\Longleftrightarrow$ Hausdorff’scher Maximalitätssatz, mit denen wir jetzt auch beginnen wollen. Die hier angegebenen Beweise beruhen größtenteils auf den Beweisen anderer Autoren, diese sind durch hochgestellte Zahlen gekennzeichnet. Zugrunde liegen außerdem die von uns vorgestellten Axiome I-X.

Satz 5.1. *Die beiden vorgestellten Fassungen des Auswahlaxioms sind äquivalent.*

Beweis. (i) Fassung I $\Rightarrow$ Fassung II:
Sei $\mathscr{A}$ eine nichtleere Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Teilmengen. Die erste Fassung von AC impliziert, dass eine Auswahlfunktion $f : \mathscr{A} \to \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ existiert mit $f(A) \in A$ $\forall A \in \mathscr{A}$. Nach Axiom VI ist $f(\mathscr{A})$ eine Menge, die aufgrund der Eigenschaft von f genau ein $f(A) \in A$ $\forall A \in \mathscr{A}$ enthält und wir sind fertig.

(ii) Fassung II $\Rightarrow$ Fassung I:[3]
Sei $\mathscr{A}$ eine Menge von nichtleeren Mengen. Wir wollen jetzt eine Auswahlfunktion $f \subseteq \mathscr{A} \times \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ konstruieren. Hierfür betrachten wir die Menge $M := \{\{A\} \times A : A \in \mathscr{A}\}$. Dann ist M eine Menge von nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen und die zweite Fassung von AC erlaubt es uns, eine Menge f auszuwählen, die genau ein Element von jedem Element aus M enthält. Um sich besser klarzumachen, dass f jetzt tatsächlich eine Auswahlfunktion ist, wie die erste Fassung von AC es verlangt, überlegen wir uns welche Elemente f enthält. M besteht aus den kartesischen Produkten $\{A\} \times A$ aller $A \in \mathscr{A}$, die ja selbst wieder Mengen sind. Die Auswahlmenge f enthält jetzt aus jedem $\{A\} \times A$ genau ein Element, also ein geordnetes Paar (A, a) wobei $a \in A$ gilt und wegen $(A, a) \in \mathscr{A} \times \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ ist f genau wie gefordert. $\square$

Satz 5.2. *Das Zorn'sche Lemma und der Haussdorff'sche Maximalitätssatz sind äquivalent.*

Beweis. (i) Zorn $\Rightarrow$ Hausdorff:
Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge. Da $X \neq \emptyset$, ist auch die Menge aller Ketten (also total geordneter Teilmengen) $\mathscr{K}$ von X nichtleer, da beispielsweise die einelementigen Teilmengen von X trivialerweise total geordnet sind. Auf diese Menge $\mathscr{K}$ wollen wir jetzt das Zorn'sche Lemma anwenden. Ersteinmal ist $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{P}(X)$ bezüglich Mengeninklusion halbgeordnet. Sei nun also K eine beliebige, total geordnete Teilmenge von $(\mathscr{K}, \subseteq)$, dann betrachten wir die Menge $V := \bigcup_{T\in K} T$. Wir zeigen jetzt, dass V eine obere Schranke von K in $(\mathscr{K}, \subseteq)$ ist. Zunächst gilt $V \in \mathscr{K}$, denn seien $x, y \in V$ beliebig gewählt, dann existiert nach Konstruktion von V ein $T \in K$ mit $x, y \in T$. Da K bezüglich Inklusion total geordnet war und nur total geordnete Teilmengen bezüglich $\leq$ enthält, folgt sofort, dass entweder $x \leq y$ oder $y \leq x$. Also ist V bezüglich $\leq$ total geordnet. Sei weiterhin T ein beliebiges Element von K und $t \in T$, dann folgt unmittelbar $t \in \bigcup_{T\in K} T = V$, also $T \subseteq V$ $\forall T \in K$. Somit ist V eine obere Schranke von K bezüglich $\subseteq$. Dann impliziert aber das Lemma von Zorn, dass in $(\mathscr{K}, \subseteq)$ mindestens ein maximales Element existiert, also eine maximale total geordnete Teilmenge von X.

(ii) Hausdorff $\Rightarrow$ Zorn:[1]
Sei nun $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge $M \subseteq X$ eine obere Schranke in X besitzt. Für beliebiges $x \in X$ betrachten wir die Menge $Z := \{y \in X : x \leq y\}$. Da $\leq$ eine (reflexive) Halbordnung auf X ist, gilt $x \leq x$, also $x \in Z$. Dann impliziert der Hausdorff'sche Maximalitätssatz, dass eine maximale Kette K in Z existiert. Nach Voraussetzung besitzt K eine obere Schranke in X, die wir m nennen wollen. Dann gilt wegen $k \leq m$ $\forall k \in K \subseteq Z$, dass $m \in Z$. Angenommen, es würde $m \notin K$ gelten, dann wäre die Menge $K' := K \cup \{m\}$ total geordnet mit $K \subset K'$ im Widerspruch zur Maximalität von K, d.h. es muss $m \in K$ gelten. Zu zeigen bleibt jetzt noch, dass m tatsächlich maximal in X ist. Hierfür nehmen wir an, es existiert ein $a \in X$ mit $m \leq a$, dann folgt sofort $a \in Z$ und wegen der Maximalität

von K auch wieder $a \in K$ und dann mit der Schranken-Eigenschaft von m auch $a \leq m$ und da $\leq$ insbesondere antisymmetrisch ist, folgt $a = m$, also ist m maximal in $(X, \leq)$. □

Satz 5.3. *Das Auswahlaxiom, das Zorn'sche Lemma und der Wohlordnungssatz sind äquivalent.*

Beweis. (i) AC $\Rightarrow$ Zorn:[2]
Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Sei $(X, \leq)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge $M \subseteq X$ eine obere Schranke in X besitzt. Zusätzlich nehmen wir an, dass X *kein* maximales Element besitzt. Sei nun $K \subseteq X$ eine beliebige Kette. Da X kein maximales Element besitzt, ist die Menge $G(K) := \{x \in X : (k \leq x) \wedge (k \neq x) \forall k \in K\}$ nichtleer. Für die beiden Bedingungen $(k \leq x) \wedge (k \neq x)$ schreiben wir abkürzend $k < x$. Wir betrachten jetzt die Menge aller Ketten $\mathscr{K}$ in X, die aus dem selben Grund wie in Satz 5.2.(i) nichtleer ist. Das Auswahlaxiom sichert uns die Existenz einer Funktion ϕ zu, die aus jedem $G(K)$ ein Element $\phi(K)$ auswählt. Eine Kette K nennen wir jetzt ϕ-Kette, falls:

(1) K wohlgeordnet ist,

(2) und $\forall k \in K$ gilt: $k = \phi(\{x \in K : x < k\})$

Wir überzeugen uns, dass überhaupt eine ϕ-Kette existiert und betrachten hierfür $F := \{\phi(\emptyset)\}$. $\phi(\emptyset)$ wählt uns ja gerade ein Element aus X aus, das im Sinne der Halbordnung „echt-größer" ist als alle Elemente der leeren Menge, also im Klartext irgendein Element aus X. Eine einelementige Teilmenge von X ist, wie wir schon gesehen haben, eine Kette in X. Dass diese wohlgeordnet ist, leuchtet ebenfalls ein, d.h. F ist eine ϕ-Kette. Seien $a \in A$ und $k \in K$. Eine Teilmenge $A \subseteq K$ heißt *Anfangsstück* von K, wenn $k \leq a \Rightarrow k \in A$.
Seien nun K und L zwei ϕ-Ketten. Dann ist eine von beiden ein Anfangsstück der anderen. Um das einzusehen sei $\mathscr{A}$ die Menge aller gemeinsamen Anfangsstücke von K und L.
$V := \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ ist auch ein Anfangsstück der beiden Ketten, denn sei $v \in V$ und o.B.d.A $k \in K$ mit $k \leq v$, dann existiert ein Anfangsstück A von L mit $v \in A$. Daraus folgt $k \in A$, also auch $k \in V$ und somit ist V ein Anfangsstück von K. Falls $V = L$ oder $V = K$, folgt die Aussage. Nun müssen wir noch den Fall $V \neq K, L$ abdecken. Dann sind aber $(L \setminus V) \subseteq L$ und $(K \setminus V) \subseteq K$ nichtleer. Da L und K nach Voraussetzung (1) wohlgeordnet waren, können wir $m := \min(L \setminus V)$ und $n := \min(K \setminus V)$ bilden und es gilt $m = \phi(V) = n$. Also wäre $V \cup \{m\}$ ein gemeinsames Anfangsstück von K und L. Für m gilt aber nach Definition $m \notin V$, da aber V die Vereinigung über alle gemeinsamen Anfangsstücke von K und L war, muss natürlich $m \in V$ gelten. Widerspruch! Unsere Annahme $V \neq K, L$ muss also falsch gewesen sein.
Sei Φ die Menge aller ϕ-Ketten. Wir betrachten $W := \bigcup_{\phi \in \Phi} \phi$. Wie man vielleicht schon vermutet, wird W eine ϕ-Kette sein, also versuchen wir die Eigenschaften (1) und (2) nachzuweisen. Zunächst ist W total geordnet. Dafür betrachten wir beliebige $x, y \in W$. Dann existieren aber ϕ-Ketten L und K mit $x \in L$ und $y \in K$, wobei o.B.d.A L ein Anfangsstück von K sein soll, also gilt insbesondere $L \subseteq K$ und somit $x \in K$ und da K sogar eine Wohlordnung ist, sind x und y vergleichbar. Sei nun $\emptyset \neq A \subseteq W$. Es existiert also ein $a \in A$ und natürlich auch eine ϕ-Kette L, in der a enthalten ist. Wir betrachten nun $A \cap L \subseteq L$ und da L wohlgeordnet ist, existiert $m := \min(A \cap L)$. Für $x \in A \setminus L$ existiert ebenfalls eine ϕ-Kette K mit $x \in K$. Da $x \notin (A \cap L)$ muss L ein Anfangsstück von K sein, das x nicht enthält, also gilt $m \leq x$ und somit gilt $m = \min(A)$ und somit ist W wohlgeordnet. Nun überprüfen wir noch (2).

Seien nun $w, x \in W$ mit $x < w$, dann existieren wieder ϕ-Ketten L, K mit $w \in K$ und $x \in L$. Falls L ein Anfangsstück von K ist, gilt $L \subseteq K$, also $x \in K$, falls umgekehrt K ein Anfangsstück von L ist, gilt ebenso $x \in K$, da insbesondere $x \leq w$ ist. Daraus folgt $\{x \in W : x < w\} \subseteq K$ und anwenden unserer Auswahlfunktion ϕ liefert:

$$\phi(\{x \in W : x < w\}) = \phi(\{x \in K : x < w\}) = w \ \forall w \in W$$

also ist W tatsächlich eine ϕ-Kette. Jetzt kommen wir endlich zum ersehnten Widerspruch, denn da wir jetzt wissen, dass W eine ϕ-Kette ist, folgt, dass auch $W \cup \phi(W)$ eine ϕ-Kette ist (wir benutzen hier also ein ähnliches Argument wie in Teil (ii) des Satzes 5.2.). Rufen wir uns nochmal ins Gedächtnis was unser ϕ eigentlich tut:„Es wählt zu einer gegebenen Kette K in X ein Element aus $G(K)$ aus.“ Da W eine ϕ-Kette, also insbesondere eine Kette ist, sollte klar sein, dass $\phi(W) \notin W$. Andererseits ist aber$W \cup \phi(W)$ selbst eine ϕ-Kette und da W die Vereinigung über Φ war, folgt $\phi(W) \in W$ und da haben wir den Widerspruch!

Rekapitulation: Der Widerspruch ist erzeugt, aber überlegen wir uns noch einmal in Ruhe, dass wir auch wirklich fertig sind. Beim Bilden der Vereinigung aller ϕ-Ketten W ist etwas schief gelaufen, das heißt, dass wir W nicht so zusammen basteln können, wie wir es gerne hätten, was bedeutet, dass mit unserer Auswahlfunktion etwas nicht gestimmt haben muss und die konnten wir ja nur bilden, weil unsere $G(K)$ allesamt nichtleer waren. Das hatten wir aber daraus gefolgert, dass X kein maximales Element bzgl. $\leq$ besitzt, also kann das auch schon nicht gestimmt haben und das Lemma von Zorn folgt tatsächlich aus dem Auswahlaxiom. Ende gut, alles gut.

(ii) Zorn $\Rightarrow$ Wohlordnungssatz:[1]
Sei X eine Menge. Wir betrachten jetzt die Menge aller wohlgeordneten Teilmengen von X, also von Paaren $(D, \leq)$, wobei $\leq$ eine Wohlordnung auf D sei. Diese Menge $\mathfrak{W} := \{(D, \leq) : D \subseteq X, \leq$ ist Wohlordnung auf $D\}$ ist nichtleer, da wir für jedes $x \in X$ die Relation $\leq_x := \{(x, x)\}$ auf $\{x\} \subseteq X$ definieren können. Auf $\mathfrak{W}$ definieren wir uns eine Relation $\preceq$ mit folgenden Eigenschaften: $(D, \leq_D) \preceq (E, \leq_E)$ gdw.

(1) $D \subseteq E$

(2) $\leq_D = \leq_E \cap (D \times D)$ d.h. für $x, y \in D \Rightarrow (x \leq_D y \Leftrightarrow x \leq_E y)$ also ist $\leq_E$ eine „Einschränkung“ von $\leq_D$ auf $D \subseteq E$

(3) $y \in E \setminus D, x \in D \Rightarrow x \leq_E y$

Wir überzeugen uns davon, dass $\preceq$ eine Halbordnung auf $\mathfrak{W}$ ist.

[I] $(D, \leq_D) \preceq (D, \leq_D)$ gilt wegen:

(1) $D \subseteq D$

(2) $\leq_D \subseteq (D \times D)$, da $\leq_D$ eine Relation auf D ist, also gilt $\leq_D = \leq_D \cap (D \times D)$

(3) $D \setminus D = \emptyset$, wir müssen also nichts tun

[II] Seien $(D,\leq_D),(E,\leq_E),(F,\leq_F) \in \mathfrak{W}$ mit $(D,\leq_D) \preceq (E,\leq_E)$ und $(E,\leq_E) \preceq (F,\leq_F)$

(1) da $\subseteq$ transitiv ist, folgt $D \subseteq F$

(2) Seien $x, y \in D$. Falls $x \leq_D y$, folgt $x \leq_E y$ wegen$(D,\leq_D) \preceq (E,\leq_E)$ und mit $(E,\leq_E) \preceq (F,\leq_F)$ folgt sofort $x \leq_F y$. Falls $x \leq_F y$, argumentiert man analog.

(3) Sei $y \in F \setminus D, x \in D$. Wegen $D \subseteq E$ gilt $(F \setminus D) = (F \setminus E) \cup (E \setminus D)$. Falls $y \in (F \setminus E)$, folgt wegen $x \in E$ und $(E,\leq_E) \preceq (F,\leq_F)$, dass $x \leq_F y$ und falls $y \in (E \setminus D)$ folgt wegen $(D,\leq_D) \preceq (E,\leq_E)$, dass $x \leq_E y$ und wegen Eigenschaft (2) dann auch $x \leq_F y$.

Wir haben also gezeigt, dass $(D,\leq_D) \preceq (E,\leq_E) \wedge (E,\leq_E) \preceq (F,\leq_F) \Rightarrow (D,\leq_D) \preceq (F,\leq_F)$, also die Transitivität von $\preceq$. Nunmehr bleibt nur noch zu zeigen, dass $\preceq$ auch antisymmetrisch ist.

[III] Seien nun $(D,\leq_D),(E,\leq_E) \in \mathfrak{W}$ mit $(D,\leq_D) \preceq (E,\leq_E)$ und $(E,\leq_E) \preceq (D,\leq_D)$. Wegen $D \subseteq E$ und $E \subseteq D$ folgt sofort $D = E$. Ebenso schnell ergibt sich dann $\leq_E = \leq_D \cap (D \times D) = \leq_D$ also $(D,\leq_D) = (E,\leq_E)$ und somit ist $\preceq$ eine Halbordnung auf $\mathfrak{W}$.

Der Maximalkettensatz impliziert, dass eine maximale total geordnete Teilmenge $\mathfrak{C}$ bzgl. $\preceq$ existiert. Wir bilden nun die Menge $U := \bigcup_{(D,\leq_D)\in\mathfrak{C}} D$ und definieren auf ihr eine Relation $\leq$ mit $x \leq y$ gdw. $\exists (D,\leq_D) \in \mathfrak{C} : x \leq_D y$. Diese Definition ist sinnvoll, da zu zwei $x, y \in U$ aufgrund der totalen Ordnung von $\mathfrak{C}$ immer ein gemeinsames $(D,\leq_D)$ mit $x, y \in D$ existiert. Die Eigenschaft (2) von $\preceq$ versichert uns dabei, dass wir $\leq$ auch tatsächlich auf ganz U definieren können und da jedes $(D,\leq_D)$ total geordnet ist, wird auch U durch $\leq$ total geordnet. Sei nun $\emptyset \neq T \subseteq U$. Dann existiert ein $(D,\leq_D)$ mit $\emptyset \neq T \cap D \subseteq D$. Da $\leq_D$ eine Wohlordnung auf D war, existiert ein minimales Element m von $T \cap D$. Wegen der totalen Ordnung durch $\preceq$ auf $\mathfrak{C}$, sowie (2) und (3), ist m auch in T minimal. Wir haben also gezeigt, dass $\leq$ eine Wohlordnung auf U ist und hätten jetzt natürlich gern, dass $U = X$ gilt. Aufgrund der Definition von U gilt auf jeden Fall $U \subset X$. Angenommen es wäre $x \in X \setminus U \neq \emptyset$, dann könnten wir die Wohlordnung $\leq$ auf U ganz einfach erweitern, indem wir einfach das x „anhängen“. Auf $U' := U \cup \{x\}$ setzen wir dafür $\forall u \in U : u \leq x$. Ein Blick auf die Definition von $\preceq$ überzeugt uns, dass dann $U \preceq U'$ gilt. Wegen $U \subset U'$ wäre dann aber $\mathfrak{C}$ nicht mehr maximal, da man $(U', \leq)$ hinzufügen könnte. Das heißt aber, dass $U = X$ gelten muss und wir haben mit $\leq$ unsere Wohlordnung auf X gefunden.

(iii) Wohlordnungssatz $\Rightarrow$ AC:
Dies ist wohl mit Abstand der einfachste Beweis in unserer ganzen Implikationskette. Sei $\mathscr{A}$ eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen. Nach dem Wohlordnungssatz existiert auf $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ eine Wohlordnung $\leq$, mithin ein kleinstes Element $m_A \in A \; \forall A \in \mathscr{A}$ bzgl. $\leq$. Die Menge $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} m_A$ ist dann unsere gesuchte Auswahlmenge. $\square$

Literaturverzeichnis:

[1] „Allgemeine Topologie I“- René Bartsch, (ISBN 3-486-58158-9, Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 2007)

[2] Skript „Höhere Axiome der Mengenlehre“- Karl-Hermann Neeb (April 2009)

[3] Vorlesungsaufzeichnungen zur Veranstaltung „Logik und Grundlagen“- Martin Otto

[4] de.wikipedia.org - Suchworte: „Mengenlehre“, „Hilbertprogramm“, „Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre“