Die Konstruktion der reellen Zahlen - Eine Ausarbeitung im Rahmen des Proseminars „Mengentheoretische Topologie“

Sevda Alaca

4. März 2013

Inhaltsverzeichnis

„Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen.“-Richard Dedekind

1 Vorwort

Diese Ausarbeitung im Rahmen des Proseminars „Mengentheoretisch Topologie“ beschäftigt sich mit der Konstruktion der reellen Zahlen.
Mit dem Zitat auf der vorangegangenen Seite, von einem der berühmtesten deutschen Mathematiker Richard Dedekind, möchte ich meine Ausarbeitung zum Thema „Konstruktion der reellen Zahlen“ einleiten.
Im Verlauf dieser Ausarbeitung kann die Konstruktion der ganzen, sowie der rationalen Zahlen aus der vorangegangenen Begründung der natürlichen Zahlen gewonnen werden. Des weiteren werden die reellen Zahlen mit Hilfe der Dedekind'schen Schnitte im letzten Teil eingeführt.
Zahlen beschäftigen die Menschheit schon seit der Antike. Die berühmtesten griechischen Philosophen dachten schon über sie nach. Umso erstaunlicher ist es, dass ein wirkliches Zahlensystem erst durch Giuseppe Peano im Jahre 1889 gegeben war.
Starten wir jedoch zunächst mit einem kleinen historischen Einblick. Beginnend mit Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre. Er klassifizierte Mengen, insbesondere auch unendliche Mengen, nach deren Mächtigkeit. Dabei definierte er die Mächtigkeit als Anzahl der Elemente und die Äquivalenz zweier Mengen als bijektive gegenseitige Aufeinanderführung. Cantor war der erste Mathematiker, der beobachtete, dass es auch bei unendlichen Mengen verschiedene Mächtigkeiten gibt. Daraufhin erklärte er auch die natürlichen Zahlen als abzählbare Menge und alle dazu gleichmächtigen Mengen ebenfalls, wie z.B. die Menge der rationalen und ganzen Zahlen. Alle anderen unendlichen Mengen erklärte er für überabzählbar (wie z.B. die reellen Zahlen).
Nach diesen Überlegungen kamen verschiedene Fragen auf, wie z.B. ob es eine Mächtigkeit zwischen der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der reellen Zahlen gibt, wobei sich später ergab, dass diese Frage einfach nicht entscheidbar ist.
Ein weiterer berühmter Mathematiker, Richard Dedekind, betrachtete Systeme, statt Mengen und veröffentlichte 1872 seine mengentheoretische Konstruktion der reellen Zahlen und 1888 die verbale mengentheoretische Axiomatisierung der natürlichen Zahlen. Grundlage für seine Überlegungen war die Formalisierung der natürlichen Zahlen von Giuseppe Penao, mit denen wir uns auch beschäftigen werden. Die Peano-Axiome haben bis heute nicht an Wichtigkeit verloren, da es keine einfachere Formulierung der natürlichen Zahlen gibt, die trotzdem alles wesentliche über diese Menge aussagt.
Eine Alternative zu den Peano-Axiomen bildet die von John Neumann postulierte mengentheoretische Begründung der natürlichen Zahlen.
Die Schwierigkeit dabei, unseren alltäglichen Begriff von Zahlen in einer mathematisch präzisen Form zu definieren, ist, dass man bei der Definition nur sehr wenig voraussetzen darf, und alle weiteren Überlegungen auf diese wenigen Voraussetzungen zurückführen können muss.
Mit dieser Aussage im Hinterkopf beginnen wir diese Ausarbeitung.

2 Die natürlichen Zahlen

„Die natürlichen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“ - Leopold Kronecker

2.1 Eine allgemeine Einführung

Das Fundament für die Konstruktion der reellen Zahlen oder auch Allgemein, die mathematische Konstruktion vom sprachlichen Begriff der Zahlen, bilden die natürlichen Zahlen. Wir verstehen unter ihnen die Mengen $\{1, 2, 3, ...\}$ oder $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Diese sind die Zahlen, die man zum Zählen, Nummerieren und Ordnen benutzt. Sie sind also im alltäglichen Leben ständig präsent. Deshalb haben sie auch die Bezeichnung der „natürlichen“ Zahlen. Bei diesem zunächst naiven Verständnis kommt die philosophische Frage auf, ob die Menge der natürlichen Zahlen mit oder ohne die Null „natürlicher“ ist. Im Verlauf der Geschichte der Mathematik stellte sich heraus, dass es keine einheitliche Meinung zu diesem Thema gibt. Grund dafür ist sicherlich auch, dass die „Null“ sich in Europa erst ab dem 13. Jahrhundert durchgesetzt hat. Je nach Geschmack und Nutzen benutzt man die Symbole $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ und macht damit deutlich, ob man nun die Menge der natürlichen Zahlen als eine Menge ohne die Null oder mit der Null versteht. Diese Symbolik ist auf zwei bedeutende Mathematiker zurückzuführen. Richard Dedekind, der mit N die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnete und Giuseppe Peano der mit N_0 die selbe Menge mit der Null. Diese Mathematiker waren es auch, die zu unserer heutigen Definition der natürlichen Zahlen führten. Peano war der erste Mathematiker, der eine Formalisierung für diese Zahlen erfand und Dedekind bettete diese Überlegung in die Mengenlehre ein, wobei sich die Überlegungen Peanos bis heute als Standardformalisierung erwies.
Betrachtet man nun diese Zahlenmenge versehen mit einer Additon und Mutliplikation, bildet sie eine mathematische Struktur. Hierbei ist zunächst unbeantwortet, was eine mathematische Struktur ist, was wir genau unter einer Menge verstehen, was eine natürlichen Zahl ist und was sie ausmacht - also kurz gesagt, eine grundlegende Einführung in die Menge der natürlichen Zahlen.
Eine schlechte Einführung hierbei wäre z.B. die Vorgehensweise, die Menge der natürlichen Zahlen als eine Menge, deren Elemente größer oder gleich Eins (bzw. größer oder gleich Null) sind zu betrachten, da man hierbei schon Größenrelation voraussetzt und somit letztendlich eine unpräzise Formulierung schaffen würde. Deshalb beschäftigen wir uns mit einer präzisen und einfachen Formulierung der natürlichen Zahlen.
Als „Axiome“ verstehen wir hierbei eine Definition oder allgemein eine Verbalisierung der intuitiv bekannten mathematischen Eigenschaften und beschreiben damit die zu definierenden Mengen, bzw. ordnen ihnen ihre Eigenschaften zu.

2.2 Axiomatisierung

Richard Dedekind definierte 1888 erstmals die natürlichen Zahlen implizit durch Axiome. Unabhängig davon stellte auch Peano 1889 ein einfaches und formal präzises Axiomensystem auf, was sich letztendlich auch durchgesetzt hat. Peano beschreibt zwar die natürlichen Zahlen, beweist jedoch nicht deren Existenz. Für den Beweis der Existenz führt die Zermelo-Fraenkel Mengenlehre ein eigenes Axiom auf - das Unendlichkeitsaxiom. Dieses wird an dieser Stelle nur als Information genannt, aber nicht weiter ausgeführt oder bewiesen.
John Neumann startete ebenfalls einen Versuch die natürlichen Zahlen darzustellen, benutzte dabei aber Mengen und erschaffte somit ein mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen.
Als erstes betrachten wir die heute gängige Beschreibung der natürlichen Zahlen:
Es gelten die folgenden Aussagen:

- 0 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
- 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
- Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

In Formeln geschrieben:

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0$
- $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n)$
- $0 \in X \forall n \in \mathbb{N} : (n \in X \Rightarrow n' \in X) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$

Die aufgezählten Eigenschaften der natürlichen Zahlen nennt man **Peano Axiome**. Sie wurden 1892 veröffentlicht. Peano formalisierte hierbei, die von Richard Dedekind bereits 1888 in seinem Artikel „Was sind und was sollen die Zahlen“ dargelegten Axiome. Deshalb spricht man auch von den „Peano-Dedekindschen Axiomen“.

Urspünglich nahm Peano an, dass 1 die kleinste natürliche Zahl sei. In seinen späteren Aufzeichnungen ersetzt er jedoch 1 durch 0. Das erstaunliche an Peanos Arbeit ist nicht, dass er bereits bekannte Aussagen mathematisch korrekt formulierte, sondern dass er erkannte, dass mit diesen wenigen einfachen Feststellungen alles wesentliche über die natürlichen Zahlen gesagt ist. Außerdem kann man diese Aussagen auch nicht einfacher formulieren oder sogar auf eines der Axiome verzichten, d.h. die Axiome sind untereinander unabhängig.
Das letzte Axiom wird auch das Induktionsaxiom genannt, da es eng mit der Beweismethode der vollständigen Induktion verknüpft ist. Dieses Axiom ist äquivalent zu der Aussage, dass jede Menge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element hat. Hinzu kommt noch, dass dadurch die Wohldefiniertheit der Addition und Mutliplikation gewährleistet ist.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion: $A(n)$ sei eine Aussageform über die Grundmenge $\mathbb{N}$. Falls die folgenden Aussagen gelten:

- $A(1)$ ist wahr. Diesen Schritt bezeichnet man als Induktionsanfang.

- Für jede natürliche Zahl folgt, dass $A(n+1)$ wahr ist, wenn $A(n)$ wahr ist. Diesen Schritt nennt man Induktionsschritt.

Dann ist die Aussage für alle $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ wahr. Aus den oben aufgeführten Axiomen definiert man die Addtion:

- A(1) $n + 0 = n$
- A(2) $n + m' = (n + m)'$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Null nichts zur Summe beiträgt und dass die Summe einer Zahl mit einem Nachfolger, der Nachfolger der Summe der ursprünglichen beiden Zahlen ist.
Weiterhin ist die Multiplikation definiert durch:

- M(1) $n \cdot 0 = 0$
- M(2) $n \cdot m' = (m \cdot n) + n$

Also macht die Null jedes Produkt Null und das Produkt einer Zahl mit einem Nachfolger ist das Produkt der ursprünglichen beiden Zahlen, vermehrt um den ersten Faktor.
Setzt man nun bei den obigen Überlegungen $1 = 0'$, so ergibt sich $n' = n + 1$.
Eine Ordnung ist gegeben durch:
x heißt kleiner als y, falls es eine natürliche Zahl z mit $x + z = y$ gibt. Dann schreibt man: $x < y$ (äquivalent zu $y > x$.)
Es ist zu bemerken, dass die Addition und Multiplikation rekursiv definiert sind, d.h. durch die erste Beziehung definiert man einen Anfangswert und für die weiteren Beziehungen greift man jeweils auf die vorher berechneten Werte zurück. Die Summe und auch das Produkt werden auf die

Nachfolger-Abbildung zurückgeführt. Daraus folgt dann auch ihre Existenz und Eindeutigkeit. Fasst man die 5 Peano-Axiome in einem Satz zusammen, so kann man sagen, dass die natürlichen Zahlen eine Menge $\mathbb{N}$ mit einem ausgezeichneten Element $0 \in \mathbb{N}$ und einer injektiven Nachfolgerfuntkion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sind, mit $0 \notin \tau(\mathbb{N})$, derart, dass $X \subseteq \mathbb{N}$ und $\tau(X) \subseteq X$ nur für $X = \mathbb{N}$ gilt.
Des weiteren gelten für alle natürlichen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}$ die folgenden Eigenschaften:

- $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Assoziativität)

- $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativität)

- $x + 0 = 0 + x = x$ (neutrales Element bzgl. der Addition)
- $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (neutrales Element bzgl. der Multiplikation)

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (Distributivität)

- $x + y' = x' + y$ (Schaukel-Lemma)

2.3 Beweise

Beweis zur Assoziativität der Addition: Für den Beweis der Assoziavität benutzen wir die Peano-Axiome und die obige Definition der Addition.
Hierzu definieren wir die Menge M mit M:=$\{x \in \mathbb{N} | \forall y, z \in \mathbb{N} (x + y) + z = x + (y + z)\}$. Diese Menge ist offensichtlich die Menge der natürlichen Zahlen, für die das Assoziativgesetz gilt.
Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt.

- Induktionsanfang: Für $1 \in M$ ist zu zeigen, dass $(x + y) + 1 = x + (y + 1)$ gilt.
  Aus A(1) folgt $(x + y) + 1 = (x + y)'$.
  Wendet man nun A(2) an folgt:
  $= x + y'$.
  Und mit A(1) dann wieder
  $= x + (y + 1)$.
  Somit ist der Induktionsanfang gezeigt.

- Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $(x + y) + z = x + (y + z)$ gilt und wollen nun zeigen, dass $(x + y) + (z + 1) = x + (y + (z + 1))$ gilt.
  Aus A(1) folgt: $(x + y) + (z + 1) = (x + y) + z'$.
  Dann folgt mit A(2) weiter:
  $= ((x + y) + z)'$.
  Da $z \in M$ folgt:
  $= (x + (y + z))'$.

Mit zweimaliger Anwendung von A(2) erhalten wir:
$= x + (y + z)' = x + (y + z')$.
Mit A(1) folgt dann nun letztendlich:
$= x + (y + (z + 1))$.

Somit haben wir mit der Beweismethode der vollständigen Induktion gezeigt, dass die Assoziativgesetz für die Addition in den natürlichen Zahlen gilt.

Beweis des Schaukel-Lemma:

- Induktionsanfang: $x + 0' = x' + =$ ist wahr, denn aus der Definition wissen wir, dass $n + 0' = (n + 0)' = n'$ und $n' + 0 = n'$ gilt.

- Induktionsschritt: Nun nehmen wir an, dass $x + y' = x' + y$ gilt und wollen damit zeigen, dass dann auch $x + (y')' = x' + y'$ gilt.
  Wegen der Definition der Addition folgt sofort:
  $x + (y')' = (x + y')'$.
  Nach der Induktionsvoraussetzung können wir folgern:
  $= (x' + y)'$.
  Dann folgt dann wieder mit der Definition der Addition:
  $= x' + y'$.
  Damit haben wir schon, die zu zeigende Aussage bewiesen.

Beweis zum neutralen Element der Addition: Wir wollen zeigen, dass $x + 0 = 0 + x = x$ gilt.

- Induktionsanfang: $0 + 0 = 0 + 0$ ist offensichtlich wahr.

- Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $x + 0 = 0 + x$ gilt, und wollen nun damit zeigen, dass auch $x' + 0 = 0 + x'$ gilt.
  Wegen Schaukel-Lemma wissen wir schon: $x' + 0 = x + 0'$. Wenn wir nun wieder die Definition der Addition benutzen, erhalten wir:
  $= (x + 0)' = (0 + x)' = 0 + x'$.

Wenn wir nun noch die Definiton der Addition ein letztes mal anwenden gilt$x' + 0 = 0 + x' = 0$. Somit haben wir die Aussage gezeigt und es gilt $x + 0 = 0 + x = x$.

Beweis zu Kommutativität der Addition Zuletzt wollen wir noch zeigen, dass die Addition der natürlichen Zahlen kommutativ ist, dass also $x + y = y + x$ gilt.

- Induktionsanfang: Nach den vorangegangen Überlegungen wissen wir, dass $x + 0 = 0 + x$ gilt.

- Induktionsschritt: Wir nehmen nun an, dass $x + y = y + x$ gilt und wollen zeigen, dass $x + y' = y' + x$ gilt.
  Wegen der Definition der Addition wissen wir, dass folgendes gilt:
  $x + y' = (x + y)' = (y + x)' = y + x'$.
  Aus dem Schaukel-Lemma folgt nun:
  $= y' + x$.
  Damit haben wir die Behauptung bewiesen. Es gilt $x + y = y + x$.

2.4 Weitere wichtige Aussagen zu den natürlichen Zahlen

Es gelten die folgenden Aussagen, die wichtig für das Lösen von Gleichungen sind:
Für $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $x, y, z \neq 0$ gilt:

- $x + z = y + z \Rightarrow x = y$, $x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$ (Rechtseindeutigkeit)
- $z + x = z + y \Rightarrow x = y$, $z \cdot x = z \cdot y \Rightarrow x = y$ (Linkseindeutigkeit)

Trichotomie: Für zwei beliebige natürliche Zahlen $x, y \in \mathbb{N}$ gilt genau eine der folgenden Beziehungen:

- $x = y$
- $x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}, z \neq 0 : y = x + z$
- $x > y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{N}, z \neq 0 : x = y + z$

Für das Rechnen mit Ungleichungen, gelten die folgenden Aussagen:
Für $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $z \neq 0$ gilt:

- Aus $x < y$ und $y < z$ folgt, dass $x < z$ gilt. (Transitivität)
- Es gilt $x < y$ genau dann, wenn $x + z < y + z$ (Monotonie der Addition)
- Es gilt $x < y$ genau dann, wenn $x \cdot z < y \cdot z$ (Monotonie der Multiplikation)
- Es gilt $x < x + z$

Bemerkung: Wir werden im Verlauf sehen, dass die genannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen größtenteils auch auf den anderen Zahlenmengen gelten. Dabei wird die Eigenschaften ab sofort nur noch bei dem Namen genannt. Für die genauen Definitionen bitte ich, sich dieses Kapitel noch einmal anzusehen.

2.5 Ein weiters Modell der natürlichen Zahlen

Wie schon bereits erwähnt, beschrieb Peano zwar in seinen Axiomen die natürlichen Zahlen, sah jedoch keine Notwendigkeit, deren Existenz zu beweisen.
Ein weiteres Modell der natürlichen Zahlen beschrieb der Mathematiker John von Neumann. Er gab eine Möglichkeit die natürlichen Zahlen durch Mengen darzustellen, also ein mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen. Die Anschauung dabei ist es, dass eine natürliche Zahl n eine Menge mit n Elementen ist. Man beginnt dabei ebenfalls mit der Null. Sie ist also die Menge mit keinem Element, d.h. die leere Menge. Die Eindeutigkeit kann man sich dabei sehr leicht überlegen, denn wenn es eine zweite solche Menge gäbe, dann hätte sie auch kein Element, woraus dann auch schon die Gleichheit folgt.
Bei der Mengenwahl für die Null ist die Entscheidung zwar eindeutig, das kann man jedoch nicht unbedingt für die folgenden einelementigen Mengen sagen. Hier ist es aber naheliegend, das einzige Element der Menge, als die einzige Menge die wir kennen zu wählen - also die leere Menge. In Analogie dazu liegt es nahe, für die zweielementige Menge die beiden Mengen als Element zu wählen, die wir bis dahin kennen.
Allgemein formuliert kann man sagen, dass $n' = \{0, 1, ..., n\} = n \cup \{n\}$ gilt, also dass der Nachfolger von n so gebildet wird, indem man zu den Elementen von n noch n selbst als Element wählt.
Formal ausgedrückt:
$0 = \emptyset$
$1 = 0' = \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = 1' = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
.
.
.
$n' = \{0, 1, ..., n\} = n \cup \{n\}$
Es ist zu bemerken, dass durch 0 und 1 tatsächlich zwei unterschiedliche Mengen entstehen, denn die 0 enthählt zwar kein Element aber die 1 enthält genau ein Element, nämlich die leere Menge. Damit ist es leicht einzusehen, dass jeder Nachfolger vom Vorgänger verschieden ist, weil die Nachfolgermenge stets ein Element mehr als die Vorgängermenge enthält. Der Vorgänger selbst ist hier nämlich ein Element.

3 Die ganzen Zahlen

3.1 Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen

Da die Operationen Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen nur eingeschränkt umkehrbar sind, wollen wir an dieser Stell die ganzen Zahlen einfürhen. Ein additives Inverses zu einer Zahl n ist eine Zahl $(-n)$ mit $n + (-n) = 0$. Um das Inverse Element der Addition zu definieren, muss man jedoch die negativen Zahlen einführen. Somit werden dann die ganzen Zahlen konstruiert.
Wir wollen diese Konstruktion mit Hilfe der natürlichen Zahlen aufbauen. Sei hierzu $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition. Wir definieren die Äquivalenzrelation wie folgt:
$(a, b) \sim (c, d)$, falls $a + d = c + b$.
Das ist bei $a \leq c$ der Fall, falls es ein $e \in \mathbb{N}$ gibt mit $c = e + a$, so dass $(c, d) = (a, b) + (e, e)$ gilt. Also unterscheiden sich die beiden Paare nur in einem Diagonalelement, also um ein Paar, in dem beide Komponenten übereinstimmen.
Als Quotientenklasse bezeichnen wir nun die Menge aller Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation und nennen sie die Menge der ganzen Zahlen.
Dann hat jede ganze Zahl einen Vertreter der Form $n := (n, 0)$, wobei $n \in \mathbb{N}_+$ gilt $(0 = (0, 0))$.
Ab sofort wird also eine natürliche Zahl als eine ganze Zahl der Form $(n, 0)$ aufgefasst.
Weiterhin definieren wir die Addition
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
Die Symmetrie und Reflexivität der Addition sollten klar sein. Wir überprüfen an dieser Stelle die Transitivität:
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$
$(c, d) \sim (e, f) \Leftrightarrow c + f = e + d$
Wenn man nun diese beiden Gleichungen addiert, erhält man:
$a + d + c + f = c + b + e + d \Leftrightarrow a + f = b + e$
Damit folgt dann sofort, $(a, b) \sim (e, f)$.
Somit erhalten wir die disjunkten Äquivalenzklassen:
$[a, b] := \{(c, d) | a + d = c + b\}$
Wendet man nun die Äquivalenzrelation erneut an, dann kan man für jede Äquivalenzklasse einen Repäsentanten finden, für den eine der beiden Komponenten 0 ist.
Die Klasse (c, d) mit $c > d$ hat einen Repräsentanten der Form $(n, 0)$, wobei $n > 0$ gilt. Für dieselbe Klasse mit $c < d$ gibt es einen Repräsentanten der Form $(0, n)$ mit $n > 0$.
Durch die Paare $[n, 0]$ sind die natürlichen Zahlen und mit den Paaren der Form $[0, n]$ die negativen Zahlen gegeben.Eine ganze Zahl nennen wir dann negativ, wenn für eine natürliche Zahl $n > 0$ $(0, n) = -n$ gilt.

Das neutrale Element bezüglich der Addition ist durch die Äquivalenzklasse $[0, 0]$ gegeben. Sei nun zu jeder Klasse folgendes definiert:
$-[a, b] = [a, b]$.
Dann gilt: $-[a, b] + [a, b] = [0, 0]$. Also hat jede Klasse ein eindeutig bestimmtes Inverses bezüglich der Addition. Üblicherweise bezeichnet man die Operation „$+(-[a, b])$“ als **Subtraktion**.

Nun wird die Multiplikation definiert:
$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$
Außerdem gilt:
Für $n \in \mathbb{N}$:
$-n := (0, n)$
$\mathbb{Z} := (a, b), a, b \in \mathbb{N}$ wobei diese Menge mit $(+)$ und $(\cdot)$ einen Ring bildet.
Mit dieser Definition werden durch die Paare eine wohldefinierte Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ induziert, wodurch $\mathbb{Z}$ die oben genannte Ring-Eigenschaft erhält. Die natürlichen Zahlen sind dann in der Menge der ganzen Zahlen so eingebettet:
n$\rightarrow$ $(n, 0)$.

3.2 Eine allgemeine Einführung

Die Menge der ganzen Zahlen stellt im Prinzip eine Erweiterung der natürlichen Zahlen in den negativen Zahlenbereich dar. Somit enthält diese Menge die gesamte Menge der natürlichen Zahlen und ihre additiven Inversen. Die Angabe der Menge als $\mathbb{Z}$:= {...,-2,-1,0,1,2,..} gibt auch gleichzeitig eine Anordnung der Elemente dieser Menge wider. Das hat auch zur Folge, dass wir zwei Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen immer vergleichen können.
Genauer betrachtet sind die ganzen Zahlen in die Teilmengen positive, nichtnegative, negative und nichtpositive Zahlen aufgeteilt. Die Null ist dabei weder positiv, noch negativ.
Das mathematische Symbol zu dieser Zahlenmenge ist $\mathbb{Z}$ (aus dem deutschen Wort „Zahlen"), wobei sie einen Ring bezüglich der Addition und Multiplikation mit Kommutativ-,Assoziativ und Distributivgesetzt bildet.
An dieser Stelle möchte ich für ein besseres Verständnis kurz die Definition der mathematischen Struktur des Ringes wiederholen.
Eine Menge R versehen mit zwei Operationen $(*)$ und $(+)$ heißt Ring (R,$(\cdot)$,$(+)$), falls

- (R,$(+)$) eine abelsche Gruppe bildet,
- (R,$(\cdot)$) eine Halbgruppe bildet und
- die Distributivgesetzte gelten, d.h. $a\cdot(b\cdot c) = a\cdot b+a\cdot c$ und $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$, für alle $a, b, c \in R$

Das neutrale Element 0 von der abelschen Gruppe (R,$(+)$) heißt hierbei das Nullelement von R. Einen Ring bezeichnet man als kommutativ, falls er bezüglich der Multiplitkation kommutativ ist. Ansonsten wird er nicht-kommutativ genannt. Hat die Halbgruppe (R,$(\cdot)$) ein neutrales Element 1, ist es ein Monoid und man bezeichnet den Ring dann als einen Ring mit Eins oder einen unitären Ring.
Weil wir hier jedoch auch ein neutrales Element bezüglich der Addition, nämlich die 0 , ein inverses Element $-n$ zu jedem Element n und ein neutrales Element der Multiplikation, die 1, haben, können wir auch von einem kommutativen unitären Ring sprechen.
Die Ring-Eigenschaft der ganzen Zahlen ermöglicht uns diese ohne Einschränkung zu addieren, subtrahieren und mutliplizieren. Da die Subtraktion in der Menge der ganzen Zahlen definiert ist können Gleichungen der Form $a+x = b$ mit natürlichen Zahlen a und b gelöst werden mit $x = b-a$. Wenn man x auf die Menge der natürlichen Zahlen beschränkt, haben Gleichungen dieser Form nicht immer eine Lösung.
Mit einer ähnlichen Gleichung kann man auch zeigen, warum die Menge der ganzen Zahlen keinen Körper bildet, denn eine Gleichung der Form $2x = 1$ ist in den ganzen Zahlen nicht lösbar. Dafür benötigt man die Menge der rationalen Zahlen. Welche auch der kleinste Körper ist, der die ganzen Zahlen enthält.
Eine wichtige Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ ist es, dass durch das oben genannte Problem eine Division mit Rest existiert. Das heißt also, dass es für zwei Zahlen stets einen größten gemeinsamen Teiler gibt.

3.3 Beweise

In der Einführung in dieses Kapitel über die ganzen Zahlen, haben wir über neutrale und inverse Elemente gesprochen. Nun ist die Frage, was ein neutrales bzw. inverses Element bewirkt und wodurch seine Existenz und Eindeutigkeit bestimmt ist. Hierzu werden wir diesen Teilabschnitt in weitere Abschnitte unterteilen und zunächst mit den Aussagen und Beweisen zur Addition beginnen.

Addition: Unter einem neutralen Element der Addtion verstehen wir ganz allgemein, dass wir zu einer Zahl $n \in \mathbb{Z}$ das neutrale Element der Addition addieren und als Ergebnis diese Zahl n bekommen. In Formeln ausgedrückt: $n + 0 = n$.
In dem vorherigen Abschnitt, haben wir die Ring-Eigenschaft der ganzen Zahlen definiert und gesagt, dass (R,(+)) eine abelsche Gruppe bildet. Die Regeln dieser Gruppe werden uns bei den Beweisen weiterhelfen.

Die Eindeutigkeit des neutralen Elements: Zunächst wollen wir beweisen, dass das neutrale Element der Addition eindeutig ist. Typisch für Eindeutigkeits-Beweise ist es, anzunehmen, dass es zwei solche Elemente gibt:
Wir nehmen also an, dass wir neben einem neutralen Element n ein weiteres neutrales Element $n' \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft $n' + x = x$ haben.
Dann muss auch
$n + n' = n$
gelten. Jedoch ist n ebenfalls ein neutrales Element, also gilt auch
$n' + n = n'$.
Daraus folgt dann aber, dass
$n' = n' + n = n + n' = n$ gilt.
Wodurch sofort folgt, dass $n' = n$ gelten muss.
Somit ist gezeigt, dass es nur ein eindeutig bestimmtes neutrales Element in $\mathbb{Z}$ geben kann. Dieses eindeutige neutrale Element der Addition bezeichnen wir üblicherweise als 0.

Die Eindeutigkeit des inversen Elements: Es sei $a, -a \in \mathbb{Z}$ mit $-a$ als inverses Element von a $(a + (-a) = 0)$. Wir nehmen an es gibt zwei inverse Elemente und $-a' \in \mathbb{Z}$ sei ein weiteres $(a + (-a') = 0)$. Dann gilt:
Da 0, wie bereits gezeigt das neutrale Element ist, gilt:
$-a = -a + 0$.
Wegen dem Inversen gilt:
$= -a + (a + (-a'))$.
Dann folgt aus der Assoziativität:
$= (-a + a) + (-a')$.
Daraufhin folgt wieder wegen dem Inversen:
$= 0 + (-a')$.
Woraus dann wieder durch die Neutralität von Null folgt:
$= -a'$.
Also ist das inverse Element ebenfalls eindeutig bestimmt.

Multiplikation: Da wir bereits bewiesen haben, dass das neutrale und inverse Element bezüglich der Addition eindeutig ist, beschäftigen wir uns mit derselben Frage in Hinblick auf die Multiplikation in der Menge der ganzen Zahlen. Hierbei folgt der Beweis zur Eindeutigkeit des neutralen Elements der Multiplikation analog zu dem Beweis in dem Abschnitt der Addition. Das neutrale Element der Multiplikation bezeichnet man üblicherweise als 1.
Die Menge der ganzen Zahlen enthält keine multiplikativen Inversen. Die Multiplikation mit einem Element und ihrem Inversen Element ergibt 1. Deshalb ist es leicht einzusehen, dass außer für die 1 keine multiplikativen Inversen in den ganzen Zahlen existieren. Dazu benötigen wir die rationalen Zahlen, die wir im nächsten Abschnitt kennen lernen werden.
Trotzdem werden wir auch in diesem Abschnitt kleine Beweise zur Multiplikation aufführen. Zum Beispiel ist uns allen bekannt, dass jede Zahl mit der Null multipliziert Null ergibt. Doch wie beweist man das?

Beweis zu: „Jede Zahl mit Null multipliziert ergibt Null“: Es gilt, wegen Null als neutrales Element der Addition:
$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0)$.
Aus der Distributivität folgt: $= x \cdot 0 + x \cdot 0$.
Nun substrahieren wir auf beiden Seiten $(x \cdot 0)$ und erhalten:
$x \cdot 0 + x \cdot 0 - x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0$
$x \cdot 0 = 0$.
Daraus folgt die zuzeigende Behauptung.

4 Die rationalen Zahlen

4.1 Eine allgemeine Einführung

Wie im vorherigen Abschnitt bereits erwähnt, ist in den ganzen Zahlen eine Division ohne Rest nicht immer möglich. Diese Division mit Rest führt zu dem Begriff eines Bruchs und „die Menge der Brüche“, die als die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet wird.
Unter einer rationale Zahl versteht man eine Zahl, die als Verhältnis (lat. „ratio“) zweier ganzer Zahlen darstellbar ist. Das Symbol der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q}$, für Quotient. Die Elemente dieser Menge sind alle Elemente die sich als Bruch darstellen lassen, wobei der Zähler und der Nenner eine ganze Zahl ist. Deshalb kann man die rationalen Zahlen im Prinzip auch als Paare ganzer Zahlen betrachten. Das Rechnen mit rationalen Zahlen ist natürlich auch in Bruchdarstellung möglich, jedoch abstrahiert man bei der Definition den Begriff des Bruchs und konstruiert sie aus den ganzen Zahlen.

4.2 Definition

Wir betrachten die Menge der geordneten Paare (a, b), wobei $b \neq 0$ gilt und a und b ganze Zahlen sind. Diese Menge nennen wir $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dabei ist die Frage, wann Brüche zueinander äquivalent sind. Wie kann man z.B. definieren, dass die zwei Brüche 2/3 und 4/6 die gleiche Zahl definieren, also äquivalent zueinander sind?
Zwei Zahlenpaare (a, b) und (c, d) bezeichnen wir dabei als äquivlant, falls gilt:
$ad = cb$.
Die oben gegebene Definition beschreibt eine Äquivalenzrelation. Diese lässt sich nun Äquivalenzklassen, also in Teilmengen der Gesamtmenge aufteilen. Die Menge aller Äquivalenzklassen nennen wir nun die Menge der rationalen Zahlen. Also kann man die Zahlenpaare nun als Brüche auffassen und Rechenoperationen definieren.

Addition und Multiplikation: Die Addition und Multiplikation in der Menge der rationalen Zahlen definieren wir wie folgt:
$(a, b) + (c, d) = (a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)$
$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$.
Für (a, b) kann man in Zukunft auch $\frac{a}{b}$ schreiben. Somit kann man die Definition der Addition und Multiplikation in Bruchdarstellung „übersetzen“:
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ab}{cd}$.
Diese Bezeichnung sollte dann jedem bekannt vorkommen, da sie genau die Rechenregeln der Bruchrechnung beschreibt, die man bereits in der Schule gelernt hat.

Die Anordnung der rationalen Zahlen. Wir bezeichnen einen Burch $\frac{a}{b}$ als positiv, wenn a und b beide positive oder negative Zahlen sind. Ein Bruch heißt negativ, falls a oder b eine negative Zahl ist.

Die Relationen „$\leq$“ und „$<$“(bzw. „$\geq$“ und „$>$“) sind wie folgt definiert:

- Sei $p \leq q$ für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ (bzw. $q \geq p$) $:\Leftrightarrow q - p \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

- Wir schreiben $p < q$ (bzw. $q > p$) genau dann, wenn $p \leq q$ und $p \neq q$ gilt.

Hierbei stimmt die definierte Anordnung auf den rationalen Zahlen mit der Anordnung auf den ganzen Zahlen überein.
$\mathbb{Q}^+$ bezeichnet die Menge der positiven rationalen Zahlen und $\mathbb{Q}^- = -\mathbb{Q}^+$ dem entsprechen die Menge der negativen rationalen Zahlen.
Wir hatten erwähnt, dass die Menge der rationalen Zahlen, im Gegensatz zu der Menge der ganzen und der natürlichen Zahlen, einen Körper bildet. An dieser Stelle möchte ich jedoch nicht weiter darauf eingehen und diese Eigenschaft beweisen. Es sei jedoch gesagt, dass daraus folgt, dass die Addition und Multiplikation in den rationalen Zahlen abgeschlossen ist, d.h. also für alle $p, q \in \mathbb{Q}$ ist $p + q \in \mathbb{Q}$ und $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.
In der Menge der ganzen Zahlen sind wir auf ein Problem mit einer Gleichung gestoßen, die in dieser Menge nicht lösbar war. Deshalb haben wir an dieser Stelle die rationalen Zahlen eingeführt. Ein ähnliches Problem ergibt sich jedoch auch in der Menge der rationalen Zahlen.
Eine Gleichung der Form $x^2 = 2$ ist hier z.B. nicht lösbar. Jedoch kann man die rationalen Zahlen nun auch erweitern und somit die reellen Zahlen definieren. Die Einführung der reellen Zahlen wird im nächsten Abschnitt mit den Dedekindschen Schnitten erfolgen. Vorher kommt jedoch eine kurze Bemerkung dazu, wie man die rationalen Zahlen noch aus den ganzen Zahlen konstruieren kann, ohne die Abstrahierung der rationalen Zahlen als Zahlenpaare der ganzen Zahlen zu benutzen.

4.3 Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen

Die Konstruktion der rationalen Zahlen kann man auch als eine Zahlbereichserweiterung aus den ganzen Zahlen ansehen. Dabei wird die ganze Zahl n als rationale Zahl $\frac{n}{1}$ identifiziert. Seien n, m zwei ganze Zahlen, dann ist die Addition und Multiplikation wie folgt definiert:
$s = n + m$
$p = n \cdot m$.
Und dann gelten folgende Rechenregeln:
$\frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{s}{1}$
$\frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{p}{1}$.

5 Dedekind'sche Schnitte

5.1 Definition

Als einen Dedekind'schen Schnitt bezeichnet man eine Teilmenge der rationalen Zahlen, mit der man die reellen Zahlen darstellen kann, d.h.man kann die reellen Zahlen mit Hilfe der Dedekind'schen Schnitte aus den rationalen Zahlen konstruieren. Eine Teilmenge α der rationalen Zahlen heißt genau dann Dedekind'scher Schnitt, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

- α ist nicht leer, umfasst aber auch nicht die rationalen Zahlen ($\alpha \neq \mathbb{Q}$)

- α ist nach unten abgeschlossen, d.h. wenn $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ und $p > q$, dann ist auch $q \in \alpha$
- α enthält kein größtes Element, d.h. für alle $p \in \alpha$ gibt es ein $r \in \alpha$, so dass $p < r$ gilt.

Eine Feststellung hieraus ist, dass wenn $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ ein Dedekind'scher Schnitt ist und $a \in \mathbb{Q}\backslash\alpha$ gilt, $x < a$ für alle $x \in \alpha$ folgt. Falls $x \in \alpha$ mit $x \geq a$ gelten würde, so würde aus der zweiten Bedingung folgen , dass $a \in \alpha$ gilt.
Zusammengefasst kann man also sagen, ein Dedekind'scher Schnitt α ist eine offene, nach unten unbeschränkte und nach oben beschränkte Teilmenge bzw. Intervall von rationalen Zahlen.

5.2 Beispiele

- Jeder rationalen Zahl $x \in \mathbb{Q}$ können wir den Schnitt $S_x := \{y \in \mathbb{Q} : y < x\}$ zuordnen. Wichtig ist, dass $y < x$ wirklich gefordert ist.

- Gilt $r \in \mathbb{Q}$, dann ist die Menge $D_r = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ ein Dedekind'scher Schnitt.

- Die Menge $\sqrt{2}$:=$\{x \in \mathbb{Q} | x < 0$ und $x^2 < 2\}$ ist ebenfalls ein Dedekind'scher Schnitt.

- $\sqrt{3} := \{q \in \mathbb{Q} | q < 0$ und $q^2 < 3\}$

Bemerkung: Die Addition und Multiplikation der Dedekind'schen Schnitte werden im nächsten Abschnitt als Addition und Multiplikation der reellen Zahlen eingeführt.

6 Die reellen Zahlen

6.1 Die Konstruktion der reellen Zahlen

Als die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezeichnet man nun die Menge aller solcher oben definierter Dedekind'schen Schnitte. Also sind die rationalen Zahlen auch in dieser Menge enthalten, da jeder Zahl als Schnitt die Menge aller kleineren Zahlen zugeordnet wird. Das heißt man ordnet der rationalen Zahlen x $\mathbb{Q}$ den Dedekind'schen Schnitt $x^* := \{s \in \mathbb{Q} | s < x\}$ zu.
Wir hatten am Ende des Abschnitts zu den rationalen Zahlen erwähnt, dass man hier bei einer Gleichung der Form $x^2 = 2$ auf ein Problem stoßt. Mit den Dedekind'schen Schnitten kann man jedoch auch genau diese Problemstellen füllen, die in den rationalen Zahlen fehlen.
Für diese Gleichung könnte man nun die Lücke z.B. mit $\sqrt(2) = \{s \in \mathbb{Q} | s < 0 \text{ oder } s^2 < 2\}$ füllen.
Damit mit den Dedekind'schen Schnitten auch Zahlen definiert werden, mit denen wir rechnen können, benötigen wir noch Rechenoperationen und eine Ordnung der neu konstruierten Zahlen, wobei die Rechenoperationen der rationalen Zahlen und auch deren Ordnung fortgesetzt werden sollte. Hierfür betrachten wir α und β, die beliebige Dedekind'sche Schnitte seien.

6.2 Addition und Beweis

Wir setzten $\mathbb{R} := \{\alpha \subseteq \mathbb{Q} | \alpha \text{ ist ein Dedekind'scher Schnitt}\}$.
Nun möchten wir die Addition mit Dedekind'schen Schnitten definieren. Hierzu seien α und β zwei Schnitte. Dann gilt:
$\alpha + \beta := \{x + y | x \in \alpha, y \in \beta\}$

Beweis: Um zu zeigen, dass die Addition so definiert ist, müssen wir zeigen, dass die den Dedekind'schen Axiomen genügt:
1.Offensichtlich gilt $\alpha + \beta \neq \emptyset$, da wir wissen, dass $\alpha, \beta \neq \emptyset$. Außerdem gilt für $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a \notin \alpha$, $b \notin \beta$: $a > x$ und $b > y$ für alle $x \in \alpha$, $y \in \beta$.
Daraus folgt dann, $a + b > x + y$ für alle $x \in \alpha$, $y \in \beta$ und damit auch $a + b \notin \alpha + \beta$.
Also folgt: $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.
2.Für $x + y \in \alpha + \beta$ und $z \in \mathbb{Q}$, mit $z \leq x + y$ gilt: $z - x \leq y$.
β erfüllt die zweite Bedingung, deshalb folgt $z - x \in \beta$.
Dann folgt aber auch: $z = x + (z - x) \in \alpha + \beta$.
3.Wäre $x_0 + y_0$ ein größtes Element in der Summe $\alpha + \beta$, dann wäre auch x_0 größtes Element in α, denn falls $x \in \alpha$ beliebig ist, folgt $x + y_0 \leq x_0 + y_0$ und damit auch $x \leq x_0$.
α besitzt aber kein größtes Element. Also folgt durch einen Wiederspruch hieraus die zuzeigende Bedingung.
Klarerweise ist die Addition hier kommutativ und assoziativ, weil sie das auch auf $\mathbb{Q}$ ist.
Wählt man $\alpha_0 = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$, so ist es leicht nachzuweisen, dass $\alpha_0 + \alpha = \alpha$ gilt. Also ist damit das neutrale Element der Addition gegeben.
Die Inverse der Addition ist gegeben durch den Dedekind'schen Schnitt $\alpha_- = \{y \in \mathbb{Q} | y + x < 0 \text{ für alle } x \in \alpha\}$.

6.3 Ordnung

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Dedekind'scher Schnitt, so sagen wir $\alpha \geq 0_{\mathbb{R}}$, falls $x > 0$ für alle $x \in \alpha$ gilt.
Weiterhin sagen wir $\alpha > 0_{\mathbb{R}}$, falls $\alpha \geq 0_{\mathbb{R}}$ und $\alpha \neq 0_{\mathbb{R}}$ gilt.
Setzen wir nun $\mathbb{R}^+ = \{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha < 0\}$, folgt mit der Definition der Addition:
$\mathbb{R} \backslash 0_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^+ \cup -\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^+ \cap -\mathbb{R}^+ = \emptyset$.
Weiterhin folgt auch, dass dann $\alpha + \beta \in \mathbb{R}^+$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ folgt. Mit der nun folgenden Definition der Multiplikation folgt dann auch sofort, dass $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}^+$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ gilt. Damit sind dann auch alle Bedingungen für eine Ordnung auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gegeben.

6.4 Multiplikation

Für zwei Dedekind'sche Schnitte $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ definiert man die Multiplikation wie folgt:
$\alpha \cdot \beta = \{x \cdot y | x \in \alpha, y \in \beta\}$.
Will man nun überprüfen, ob $\alpha \cdot \beta$ ebenfalls ein Dedekind'scher Schnitt ist, geht man den analogen Weg, wie bei der Addition. Daraus folgt dann, dass diese Behauptung richtig ist.
Seien nun α, β beliebige Elemente der reellen Zahlen. Dann definieren wir die Multiplikation wie folgt:

$$\alpha \cdot \beta := \begin{cases} \alpha \cdot \beta & \alpha, \beta \geq 0_{\mathbb{R}} \\ (-\alpha) \cdot (-\beta) & -\alpha, -\beta \geq 0_{\mathbb{R}} \\ -((-\alpha) \cdot (\beta)) & -\alpha, \beta \geq 0_{\mathbb{R}} \\ -((\alpha) \cdot (-\beta)) & \alpha, -\beta \geq 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

Das neutrale Element der Multiplikation ist $1_{\mathbb{R}} = \alpha_1$ und das multiplikative Inverse Element eines Elements $\alpha > 0_{\mathbb{R}}$ wird konstriert durch:
$\alpha^* := \{y \in \mathbb{Q} | xy > 1 \text{ für alle } x \in \alpha\}$

6.5 Bemerkung zur Vollständigkeit

Damit man die Vollständigkeit der reellen Zahlen beweist, muss man zunächst zeigen, dass jede nach unten beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum besitzt. Daraus folgt dann mit den Rechenregeln für Infimum und Supremum, dass jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum bestizt.
Des weiteren muss gezeigt werden, dass die reellen Zahlen archimedisch angeordnet sind. Somit wären alle Eigenschaften für die Vollständigkeit von $(\mathbb{R}, \cdot, +)$ gegeben.

6.6 Bemerkung zu Mächtigkeit

Am Anfang dieser Ausarbeitung wurde erwähnt, dass die Menge der reellen Zahlen im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen eine überabzählbare Menge ist. Nun wollen wir an dieser Stelle klären, was Überabzählbarkeit bedeutet und wieso die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.
Zunächst wird die Frage beantwortet was Überabzählbarkeit bedeutet:
„Eine Menge heißt Überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist. Dabei heißt eine Menge abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder eine Bijektion zur Menge der natürlichen Zahlen existiert. Eine Menge ist also genau dann überabzählbar, wenn ihre Mächtigkeit (Anzahl der Elemente) größer ist als die der Menge der natürlichen Zahlen.“ (Wikipedia-Überabzählbarkeit)

Unter einer Bijektion verstehen wir dabei, eine vollständige Paarbildung zwischen der Definitionsmenge und der Zielmenge, d.h. die Definitions- und Zielmenge haben dabei die gleiche Mächtigkeit, also gleich viele Elemente. Anders ausgedrückt, jedes Bild hat genau ein Urbild.
In Formeln: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist bijektiv, wenn für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ existiert.
Die Überabzählbarkeit wurde vom Urvater der Mengenlehre selbst, Georg Cantor, in seinem zweiten Diagonalelement bewiesen.
In seinem ersten Diagonalelement beweist Cantor, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, indem er eine Bijektion zwischen den rationalen und den natürlichen Zahlen angibt. Somit ist dann eine Abbildung gegeben, die es erlaubt, alle rationalen Zahlen in einer abzählbar unendlichen Folge anzuordnen.
Für sein zweites Diagonaltelement benutzt Georg Cantor einen Widerspruchsbeweis, d.h. er nimmt an, es gäbe eine Bijektion zwischen den reellen und den natürlichen Zahlen und führt diese Aussage zu einem Widerspruch.

Cantors zweites Diagonalelement: Sei z_i auf dem Intervall $(0, 1)$ eine beliebige unendliche Folge reller Zahlen.
Nun ist zu zeigen, dass mindestens eine reelle Zahl in diesem Intervall existiert, die nicht in Folge z_i beinhaltet ist.
In Dezimalbruch-Entwicklung dargestellt, sehen die Zahlen aus der Folge z_i wie folgt aus:
$z_1 = 0, \{a_{11}\}a_{12}a_{13}...$
$z_2 = 0, a_{21}\{a_{22}\}a_{23}...$
$z_3 = 0, a_{31}a_{32}\{a_{33}\}...$
$z_4 = 0, ...$
.
.
.
Bei dieser Darstellung sind die z_i jeweils reelle Zahlen und die a_{ij} ihre Dezimalstellen. Dabei sind die Diagonalelemente hervorgehoben, aus denen wir nun eine neue Zahl konstruieren:
$x = 0, x_1x_2x_3....$
Für diese Zahl gibt es ein besonderes Bildungsgesetz, und zwar gilt:
$x_1 = 1$, falls $a_{ij} \neq 1$
$x_1 = 2$, falls $a_{ij} = 1$
Damit ist garantiert, dass sich die Zahl x von jeder Zahl z_i unterscheidet. Dabei ist x größer als 0 und kleiner als 1 und wir nennen sie die **Diagonalzahl**.
Nun haben wir aber gezeigt, dass die Folge z_i nicht alle Zahlen zwischen 0 und 1 enthält. Somit wurde gezeigt, dass für jede Folge im Intervall $(0, 1)$ immer eine Zahl existiert, die nicht in dieser Folge enthalten ist. Also enthält keine Folge alle reellen Zahlen im Intervall $(0, 1)$. Deshalb ist dieses Intervall weder gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen, noch ist sie endlich und deshalb überabzählbar.
Da wir für z_1 eine beliebige Folge gewählt haben, gilt die Aussage für jede solche Folge. Außerdem ist das Intervall $(0, 1)$ eine Teilmenge der reellen Zahlen und wenn das Intervall schon überabzählbar ist, dann ist $\mathbb{R}$ erst recht überabzählbar.

7 Bemerkungen:

Für alle Beweise und weitere wichtige Eigenschaften der verschiedenen Zahlenmengen verweise ich auf die angegebenen Quellen. In ihnen werden Sie viele Skripte anderer Universitäten finden, die auf verschiedene, aber trotzdem sehr ähnliche Weise die Zahlen einführen.
Da dieses Thema relativ umfangreich ist, habe ich mich bei meiner Ausarbeitung auf das wesentliche konzentriert. Für all diejenigen, deren Interesse hiermit geweckt wurde oder die sich weiter mit diesem Thema befassen wollen verweise ich auf die Literaturangabe.

8 Literatur

- Axiomatische Beschreibung der ganzen Zahlen
- Mathematik Facharbeit
- „Axiomatischer Aufbau der natürlichen Zaheln“
- „Die rationalen Zahlen“
- Universität Münster: „Ergänzung zur Vorlesung „Analysis I“ WS 08/09“
- Universität Tübingen: „Analysis I, alternatives Kapitel II“
- Ein Skriptum der Universität Siegen
- Die natürliche Zahlen
- Die ganzen Zahlen
- Die rationalen Zahlen
- Dedekind’scher Schnitt
- Die reellen Zahlen
- Universität Würzburg: „Konstruktion der ganzen Zahlen und der rationalen Zahlen“
- „Ein Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen“