Filter und Ultrafilter

Lukas Philippus und Klaus Kreß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik,
Technische Universität Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Ein sehr wichtiger Begriff der Allgemeinen Topologie ist der der Konvergenz. In allgemeinen metrischen Räumen stellt sich die Folgenkonvergenz folgendermaßen dar: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gegen einen Punkt x_0, wenn gilt:

(1) $\forall \epsilon > 0\colon \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq n_\epsilon\colon a_n \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

Nun betrachten wir die Folgenendstücke $A_k = \{a_n \mid n \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Jedes Endstück enthält fast alle Elemente von (a_n). Dann gilt:

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\forall \epsilon > 0\colon \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}\colon A_{n_\epsilon} \subseteq (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

Als nächstes konstruieren wir uns ein Mengensystem φ von Mengen, die mindestens ein Folgenendstück umfassen. Es ergibt sich $\varphi := \{B \subseteq \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}\colon B \supseteq A_k\}$. Also gilt weiterhin:

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\forall \epsilon > 0\colon (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \in \varphi$

Mit anderen Worten konvergiert also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen x_0, wenn alle ϵ-Umgebungen in dem Mengensystem φ enthalten sind. Das Mengensystem φ ist durch die Folge eindeutig bestimmt und nicht umgekehrt, da für jede gegen x_0 konvergente Folge jede beliebige ϵ-Umgebung um x_0 ein Folgenendstück dieser Folge enthält und daher das Mengensystem φ erzeugt. Das Mengensystem φ ist ein Beispiel für einen Filter. Man sagt, der Filter φ konvergiert gegen x_0. Mit der Konvergenz von Filtern werden wir uns später noch eindringlich beschäftigen, da die Folgenkonvergenz nicht ausreicht um bestimmte Sachverhalte zu beschreiben.

2 Definitionen und wichtige Eigenschaften

Dieses Kapitel enthält wichtige Definitionen, welche für die weiteren Ausführungen unerlässlich sind. Wir beginnen mit der wohl wichtigsten Definition dieser Ausarbeitung, der Definition des Filters. Anschließend werden einige Beispiele gegeben und zur nächsten Definition übergegangen, deren Motivation sich direkt aus dem letzten Korollar des ersten Abschnittes ergibt. Nach dem Begriff des Ultrafilters werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels noch die Begriffe Filterbasis und Filtersubbasis eingeführt.

2.1 Filter

Beginnen wir also mit der Definition eines Filters:

Definiton 2.1.1 (Filter)**.** *Sei X eine Menge. Eine nichtleere Familie $\varphi \subseteq \mathscr{P}(X)$ heißt ein Filter auf X genau dann, wenn*

(1) $$\emptyset \notin \varphi$$

(2) $$A \in \varphi \wedge B \in \varphi \Rightarrow A \cap B \in \varphi$$

(3) $$A \in \varphi \wedge B \supseteq A \Rightarrow B \in \varphi$$

gelten. Die Menge aller Filter auf X bezeichnen wir mit $\mathscr{F}(X)$.

Nun ein paar Beispiele für Filter:

Beispiel 2.1.2. *(1) Ist $\emptyset \neq A \subseteq X$, so ist das Mengensystem*

$$[A] := \{B \in \mathscr{P}(X) | B \supseteq A\}$$

ein Filter auf X, der so genannte von A erzeugte Hauptfilter.

(1.1) Ist die Menge $A := \{x\}, x \in X$ einpunktig, so bezeichnen wir den von $\{x\}$ erzeugten Hauptfilter auch als von x erzeugten Einpunktfilter.

(2) Sei X eine unendliche Menge und F das System der Komplemente aller endlichen Teilmengen von X. F ist ein Filter auf X, der so genannte Fréchet-Filter (oder kofinite Filter) auf X.

Um verschiedene Filter in ein Verhältnis setzen zu können, ist folgende Definition von elementarer Bedeutung:

Definiton 2.1.3 (Grobheit, Feinheit)**.** *Seien $\varphi, \varphi' \in \mathscr{F}(X)$. φ heißt feiner als φ', wenn φ den φ' umfasst, d.h. wenn*

$$\varphi' \subseteq \varphi$$

gilt. Der Filter φ' heißt dann gröber als φ.

Proposition 2.1.4. *Ist $\mathscr{E}$ eine (durch Inklusion) total geordnete Menge von $\mathscr{F}(X)$, so ist die Vereinigung $\psi := \bigcup_{\varphi\in\mathscr{E}} \varphi$ wiederrum ein Filter, und zwar das Supremum von $\mathscr{E}$ in $\mathscr{F}(X)$.*

Beweis. Um zu zeigen, dass ψ ein Filter ist, müssen wir die Bedingungen der Filter-Definition überprüfen. Klar ist, dass $\emptyset \notin \psi$ (1), da $\emptyset$ in keinem der vereinigten Filter enhalten war. Sind A,B Elemente von ψ, so muss jedes von ihnen in einem der vereinigten Filter enthalten sein, sagen wir $A \in \varphi_A$ und $B \in \varphi_B$. Nun ist $\mathscr{E}$ nach Voraussetzung total geordnet durch Inklusion, so dass wir $\varphi_A \subseteq \varphi_B$ oder $\varphi_B \subseteq \varphi_A$ haben. In jedem Fall sind A und B beide im größeren der beiden Filter enthalten, daher auch ihr Durchschnitt, der folglich auch in ψ liegt (2). Analog geht es mit der dritten Bedingung (3): Ist $A \in \psi$ und $B \supseteq A$ gegeben, so muss A in einem der vereinigten Filter liegen, sagen wir wieder in φ_A. Dann liegt aber auch B in φ_A und folglich auch in ψ.

Bleibt zu zeigen, dass ψ das Supremum von $\mathscr{E}$ in $\mathscr{F}$(X) ist. Zunächst ist klar, dass ψ eine obere Schranke von $\mathscr{E}$ ist, da ψ als Vereinigung aller $\varphi \in \mathscr{E}$ natürlich größer als jedes einzelne davon ist. Wenn wir weiterhin eine beliebige obere Schranke ψ' von $\mathscr{E}$ in $\mathscr{F}$(X) haben, so gilt für diese: $\forall \varphi \in \mathscr{E} : \varphi \subseteq \psi'$ und folglich $\psi = \bigcup_{\varphi\in E} \varphi \subseteq \psi'$. Somit ist ψ kleinste obere Schranke, also Supremum. □

Korollar 2.1.5. *Zu jedem $\varphi \in \mathscr{F}(X)$ gibts es maximale (bezüglich Inklusion) Elemente $\psi \in \mathscr{F}(X)$ mit $\psi \supseteq \varphi$.*

Beweis. Die obige Proposition 2.1.4 sichert die Anwendbarkeit des Zorn'schen Lemmas auf $\mathscr{F}$(X). □

2.2 Ultrafilter

Das obige Korollar 2.1.5 besagt, dass es zu jedem Filter einen maximalen Filter auf derselben Menge gibt. Diese Erkenntnis motiviert folgenden Defintion:

Definiton 2.2.1 (Ultrafilter und Oberfilter/Oberultrafilter)**.** *Die maximalen Elemente in $\mathscr{F}(X)$ nennen wir Ultrafilter auf X. Ein Ultrafilter ist also ein Filter, zu dem es keinen feineren Filter gibt. Die Menge aller Ultrafilter auf X bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_0(X)$.*

Die Menge aller derjenigen Filter, die einen gegebenen Filter φ enthalten, bezeichnen wir mit $\mathscr{F}(\varphi)$ und die Menge aller derjenigen Ultrafilter, die den Filter φ enthalten bezeichnen wir mit $\mathscr{F}_0(\varphi)$. (Diese Filter heißen auch Oberfilter bzw. Oberultrafilter von φ.)

Die einzigen explizit angebbaren Ultrafilter sind die Einpunktfilter.

Bemerkung 2.2.2. *Zu jedem Filter φ auf einer Menge X gibt es einen Ultrafilter auf X, der feiner als φ ist.(folgt direkt aus Korollar 2.1.5 und Definition 2.2.1)*

Nun folgen ein Lemma und ein Korollar, welche helfen Ultrafilter besser charakterisieren zu können.

Lemma 2.2.3 (Ultrafilter). *Sei X eine Menge und $\varphi \in \mathcal{F}(X)$. Dann sind äquivalent:*

$$\varphi \text{ ist ein Ultrafilter} \tag{1}$$

$$\forall A \subseteq X : (A \in \varphi) \vee (X \setminus A) \in \varphi \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(X) : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi \Rightarrow \exists i \in \{1, ..., n\} : A_i \in \varphi \tag{3}$$

Beweis. "(1) $\Rightarrow$ (2)":
Sei φ ein Ultrafilter. Nehme an, (2) gelte nicht: Dann gäbe es eine Teilmenge A von X mit $A \notin \varphi$ und $X \setminus A \notin \varphi$. Ist $X \setminus A$ nicht Element von φ, so folgt, dass auch keine Teilmenge von $X \setminus A$ Element von φ sein kann (da Filter abgeschlossen gegenüber Obermengenbildung sind). Somit gilt für jedes Element $P \in \varphi$, dass es einen nichtleeren Durchschnitt mit A hat, da es sonst Teilmenge von $X \setminus A$ wäre. Wir haben also:

$$\forall P \in \varphi : P \cap A \neq \emptyset$$

Betrachte nun die Menge

$$\varphi' := \{B \subseteq X | \exists P \in \varphi : P \cap A \subseteq B\}$$

Diese Menge ist wiederrum ein Filter. Überprüfe die Definition: (1) $\emptyset \notin \varphi'$ gilt, da nur Obermengen der nichtleeren Mengen $P \cap A, P \in \varphi$ zu φ' gehören; (2) zu beliebigen $U_1, U_2 \in \varphi'$ muss es nach Konstruktion von φ' Elemente $P_1, P_2 \in \varphi$ geben mit $P_1 \cap A \subseteq U_1$ und $P_2 \cap A \subseteq U_2$, woraus $(P_1 \cap P_2) \cap A \subseteq U_1 \cap U_2$ folgt und somit $U_1 \cap U_2 \in \varphi'$ gilt, wegen $P_1 \cap P_2 \in \varphi$; (3) die Abgeschlossenheit von φ' gegenüber Obermengenbildung ist wegen der Konstruktion offensichtlich.

φ' ist also ein Filter, welcher natürlich A als Element und φ als Teilmenge enthält. Damit wäre φ' ein echt feinerer Filter (bezüglich Inklusion) als φ, im Widerspruch zur Maximalität von φ.

"(2) $\Rightarrow$ (3)":
Es gelte (2); (3) jedoch nicht: Dann gäbe es endlich viele Teilmengen $A_1, ..., A_n$ von X derart, dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi$$

gälte, und dass $\forall i = 1, ..., n : A_i \notin \varphi$. Aus (2) folgt hierraus $\forall i = 1, ..., n : (X \setminus A_i) \in \varphi$ und somit wegen der (endlichen) Durchschnittsabgeschlossenheit von Filtern auch

$$\bigcap_{i=1}^{n} X \setminus A_i = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi,$$

da jedoch außerdem $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi$ gilt, steht dies im Widerspruch zur Filterdefinition.

"(3) $\Rightarrow$ (1)":
Angenommen (3) gälte, φ sei jedoch kein Ultrafilter. Dann exisitiert somit ein echt feinerer Filter ψ, d.h. wir hätten $\psi \supset \varphi$ und $\exists A \in \psi : A \notin \varphi$. Nun ist $X = A \cup (X \setminus A)$ auf jeden Fall Element von φ und folglich wegen (3) auch $X \setminus A \in \varphi$, da ausdrücklich $A \notin \varphi$ gewählt war. Da $\psi \supset \varphi$ gilt, folgt hierraus aber auch, dass $X \setminus A \in \psi$, im Widerspruch zur Filtereigenschaft von ψ und der Annahme $A \in \psi$. □

Korollar 2.2.4 (Ultrafilter II). *Sei X eine Menge und $\psi \in \mathscr{F}(X)$. Dann sind äquivalent:*

(1) $$\psi \text{ ist ein Ultrafilter}$$

(2) $$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathscr{F}(X) : \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i \subseteq \psi \Rightarrow \exists k \in \{1, ..., n\} : \varphi_k \subseteq \psi$$

Beweis. "(2)⇒(1)":
folgt direkt aus dem obigen Ultrafilter-Lemma, da für φ_i auch Hauptfilter gewählt werden können.

"(1)⇒ (2)":
Angenommen, wir hätten $\varphi_1, ...\varphi_n$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i \subseteq \psi, \text{ aber } \forall i : \varphi_i \nsubseteq \psi.$$

Dann heißt das, dass jedes φ_i eine Menge A_i enthält, die nicht in ψ enthalten ist:

$$\forall i : \exists A_i \in \varphi_i : A_i \notin \psi$$

Andererseits ist $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ natürlich im Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i$ enthalten (als Obermenge jedes der A_i) und folglich nach Voraussetzung in ψ. Dann folgte nach obigem Ultrafilter-Lemma jedoch, dass mindestens eines der A_i auch in ψ enthalten wäre, im Widerspruch zur Wahl der A_i. □

2.3 Filterbasis und Filtersubbasis

Stellt man sich die Frage, nach der Erzeugung von Filtern, kommt man sofort zu den Begriffen der Filterbasis bzw. der Filtersubbasis.

Definiton 2.3.1 (Filterbasis). *Eine Familie $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge X heißt Filterbasis genau dann, wenn die Menge*

$$[\mathscr{U}]_{\mathscr{F}(X)} := \{B \subseteq X | \exists A \in \mathscr{U} : A \subseteq B\}$$

aller Obermengen von Elementen aus $\mathscr{U}$ ein Filter ist. $[\mathscr{U}]_{\mathscr{F}(X)}$ heißt dann von B erzeugter Filter.

Definiton 2.3.2 (Filtersubbasis). *Eine Familie $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge X heißt Filtersubbasis genau dann, wenn die Menge*

$$[\mathscr{B}]_{\mathscr{F}(X)} := \{C \subseteq X | \exists n \in \mathbb{N}, B_1, ...B_n \in \mathscr{B} : \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq C\}$$

aller Obermengen endlicher Durchschnitte von Elementen aus $\mathscr{B}$ ein Filter ist. $[\mathscr{B}]_{\mathscr{F}(X)}$ heißt dann von B erzeugter Filter.

Proposition 2.3.3. *Sei X eine nichtleere Menge und $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$.*

(1) *$\mathscr{U}$ ist eine Filtersubbasis genau dann, wenn alle endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathscr{U}$ nichtleer sind.*

(2) *$\mathscr{U}$ ist eine Filterbasis genau dann, wenn es zu jedem endlichen Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n A_i$ von Elementen aus $\mathscr{U}$ ein Element $C \neq \emptyset$ aus $\mathscr{U}$ gibt, so dass $B \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$ gilt.*

(3) *Sind $\mathscr{U}$ und $\mathscr{B}$ Filterbasen, so ist $\mathscr{U} \cup \mathscr{B}$ eine Filtersubbasis genau dann, wenn $\forall A \in \mathscr{U}, B \in \mathscr{B}\colon A \cap B \neq \emptyset$, d.h. wenn jedes Element von $\mathscr{U}$ mit jedem Element von B einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

(4) *Ist $\mathscr{U}$ eine Filterbasis auf X und $A \subseteq X$, dann ist $\mathscr{U} \cup \{A\}$ eine Filtersubbasis genau dann, wenn $\forall P \in \mathscr{U}\colon P \cap A \neq \emptyset$,*

Beweis. Für (1) und (2) ist klar, dass aus der Filterbasis- bzw Filtersubbasiseigenschaft von $\mathscr{U}$ sofort die postulierte Bedingung folgt, einfach deshalb, weil dann $\mathscr{U}$ Teilmenge eines Filters ist. Es bleibt somit zu zeigen, dass aus den in (1) und (2) postulierten Bedingungen jeweils die Filterbasis– bzw Filtersubbasiseigenschaft folgt.

(1): Da $[\mathscr{U}]$ genau aus den Obermengen der endlichen Durchschnitte von $\mathscr{U}$-Elementen besteht, ist $\emptyset$ kein Element von $\mathscr{U}$. Haben wir

$$[\mathscr{U}] \ni A \supseteq \bigcap_{i=1}^n A_i \text{ und } [\mathscr{U}] \ni B \supseteq \bigcap_{j=1}^m B_j$$

mit $A_i, B_j \in \mathscr{U}$, so folgt sofort

$$A \cap B \supseteq \bigcap_{i=1}^n A_i \cap \bigcap_{j=1}^m B_j$$

und somit $A \cap B \in [\mathscr{U}]$. Dass Obermengen von $[\mathscr{U}]$-Elementen wieder zu $[\mathscr{U}]$ gehören steht unmittelbar in der Definition von $[\mathscr{U}]$. Folglich ist $[\mathscr{U}]$ ein Filter und $\mathscr{U}$ somit eine Filtersubbasis.

(2) Zunächst ist wegen der Bedingung, dass nichtleere Elemente B von $\mathscr{U}$ unterhalb jedes endlichen Durchschnittes von $\mathscr{U}$-Elementen liegen sollen klar, dass alle endlichen Durchschnitte von $\mathscr{U}$-Elementen selbst nicht leer sind, so dass $\mathscr{U}$ laut (1) eine Filtersubbasis ist. Andererseits ist dadurch auch klar, dass die Familie der Obermengen endlicher Durchschnitte (die ja nach (1) ein Filter ist) genau dieselbe ist, wie die Familie der Obermengen von $\mathscr{U}$-Elementen, da jeder endliche Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathscr{U}$ selbst Obermenge eines Elementes $B \in \mathscr{U}$ ist.

(3)Ein endlicher Durchschnitt von Elementen aus $\mathscr{U} \cap \mathscr{B}$ ist entweder ein endlicher Durchschnitt von ausschließlich Elementen aus $\mathscr{U}$ bzw. ausschließlich Elementen aus $\mathscr{B}$ und daher wegen der Filterbasis-Eigenschaft von $\mathscr{U}, \mathscr{B}$ nichtleer, oder er ist von der Form

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \cap \bigcap_{j=1}^m B_j$$

mit $A_i \in \mathscr{U}, B_j \in \mathscr{B}$. Dann gibt es aber wegen der Filterbasiseigenschaft von $\mathscr{U}, \mathscr{B}$ ein

$$\emptyset \neq A \in \mathscr{U} \text{ mit } A \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$$

und ein

$$\emptyset \neq B \in \mathscr{B} \text{ mit } B \subseteq \bigcap_{j=1}^{m} B_j$$

und nach Voraussetzung ein

$$\emptyset \neq A \cap B \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} C_j.$$

(4) Folgt sofort aus (3), da eine einzelne nichtleere Menge A als {A} natürlich eine Filterbasis für einen Hauptfilter bildet.

□

Bemerkung 2.3.4. *Offensichtlich ist jeder Filter eine Filterbasis und jede Filterbasis ist auch eine Filtersubbasis.*

Es folgt ein Lemma, mit welchem es möglich ist, einem Filter nachzuweisen, dass er bestimmte Mengen mit einer bestimmten Eigenschaft besitzt, indem man nachprüft, dass seine Oberultrafilter diese Mengen enthalten.

Lemma 2.3.5 (Content Detector)**.** *Sei X eine nichtleere Menge, $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $\varphi \in \mathscr{F}(X)$. Sei E abgeschlossen gegen endliche Vereinigungnen, d.h. mit je endlich vielen Elementen $E_1, ..., E_n \in \mathscr{E}$ ist auch stets $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ Element von $\mathscr{E}$. Dann gilt:*

$$\varphi \cap \mathscr{E} \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \psi \in \mathscr{F}_0(\varphi) : \psi \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$$

d.h. ein Filter enthält genau dann ein Element von $\mathscr{E}$, wenn jeder seiner Oberultrafilter ein Element von $\mathscr{E}$ enthält.

Beweis. Es ist klar, dass mit φ natürlich auch jeder φ als Teilmenge umfassende Ultrafilter ein Element von $\mathscr{E}$ enthält. ($E \in \varphi \subseteq \psi \Rightarrow E \in \psi$). Somit muss nur noch die andere Richtung gezeigt werden.

Gelte also $\forall \psi \in \mathscr{F}_0(\varphi) : \exists E_\psi \in \mathscr{E}$: $E_\psi \in \mathscr{E}$. Angenommen, φ enthielte kein Element aus E (woraus automatisch $X \notin \mathscr{E}$ folgt).

Wir betrachten die Menge $\mathscr{B} := \{X \setminus E | E \in \mathscr{E}\}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathscr{E}$ gegen endliche Vereinigungen ist $\mathscr{B}$ abgeschlossen gegen endliche Durchschnitte in $\mathscr{B}$ und wir haben $\emptyset \notin \mathscr{B}$ wegen $X \notin \mathscr{E}$. Nach obiger Proposition 3(2) ist $\mathscr{B}$ folglich eine Filterbasis. Für jedes $P \in \varphi$ und jedes $B \in \mathscr{B}$ haben wir ferner $P \cap B \neq \emptyset$, da $P \cap B = \emptyset$ bedeuten würde, dass $P \subseteq X \setminus B \in \mathscr{E}$ und damit $\varphi \cap \mathscr{E} \neq \emptyset$ folgte. Somit ist laut obiger Proposition 2.3.3(3) die Vereinigung $\varphi \cup \mathscr{B}$ eine Filtersubbasis und laut Korollar 2 gibt es dann einen Ultrafilter, der den von $\varphi \cup \mathscr{B}$ erzeugten Filter und somit insbesondere sowohl φ als auch $\mathscr{B}$ als Teilmenge enthält. Es gäbe also einen Oberultrafilter von φ, der die Komplemente aller $\mathscr{E}$-Mengen und folglich kein einziges Element von $\mathscr{E}$ selbst enthält, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

3 Filterkonvergenz

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem interessanten Thema der Filterkonvergenz. Hier wird erstmals wirklich deutlich, wofür der abstrakte Begriff des Filters eigeführt wurde, indem an Beispielen aufgezeigt wird, dass der bekannte Begriff der Folge in topologischen Räumen oft nicht ausreicht, um elementare und wichtige Sätze zu beweisen.

3.1 Topologischer Raum

Bevor wir die Konvergenz von Filtern betrachten, führen wir zunächst den Begriff der Topologie bzw. des topologischen Raums ein, da erst in einem topologischen Raum die Bedeutung und Vorteile der Filter gegenüber Folgen wirklich deutlich werden.

Definiton 3.1.1 (Topologischer Raum). *Ein topologischer Raum besteht aus einer Menge X und einem System τ von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) $M \subseteq \tau$ *impliziert* $\bigcup M \in \tau$

(3) $O_1, O_2 \in \tau$ *impliziert* $O_1 \cap O_2 \in \tau$

Dabei wird τ eine Topologie genannt. Die Elemente von τ heißen offene Mengen, ihre Komplemente in X abgeschlossene Mengen.

Es folgen zwei Beispiele für Topologien, an welchen im späteren Verlauf gut Vorteile von Filtern gegenüber Folgen verdeutlicht werden können.

Definiton 3.1.2 (Diskrete Topologie). *Sei X eine Menge. Die diskrete Topologie auf X ist die Topologie, unter der alle Teilmengen von X offen sind.*

Definiton 3.1.3 (Koabzählbare Topologie). *Sei X eine überabzählbare Menge. Dann ist τ mit $\tau := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ ist höchstens abzählbar}\}$ die koabzählbare Topologie.*

3.2 Konvergenz von Filtern

In diesem Abschnitt wird nun der Begriff der Konvergenz von Filtern, zusammen mit einem weiteren, für die Konvergenz sehr wichtigen, Filter, dem Umgebungsfilter, eingeführt. Anschließend wird mit zwei Sätzen der Vorteil der Filter den Folgen gegenüber illustriert.

Definiton 3.2.1 (Filterkonvergenz). *Sei (X,τ) ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\varphi \in \mathscr{F}(X)$. Wir sagen φ konvergiert gegen x bezüglich τ (in Zeichen: $\varphi \xrightarrow{\tau} x$, bzw. $x \in \lim \varphi$) genau dann, wenn*

$$\varphi \supseteq x \cap \tau,$$

d.h. genau dann, wenn φ alle diejenigen τ-offenen Mengen als Elemente enthält, die x als Element enthalten.

Der von $x \cap \tau$ erzeugte Filter

$$U^{\tau}(x) := \{B \subseteq X | \exists O \in \tau : x \in O \subseteq B\}$$

heißt Umgebungsfilter von x bezüglich τ.

Mit anderen Worten heißt das, dass ein Filter φ genau dann konvergent gegen einen Punkt $x \in X$ ist, wenn φ feiner als der Umgebungsfilter von x ist:

$$U^{\tau}(x) \subseteq \varphi$$

Gibt es keinen Zweifel bezüglich der zugrundeliegenden Topologie, wird das τ am Konvergenzpfeil und an U(x) auch weggelassen.

Beginnen wir mit einem Satz, welcher besagt, dass Topologien durch ihre Filterkonvergenz determiniert werden.

Satz 3.2.2. *Sei X eine Menge und τ, τ' Topologien auf X. Die beiden Topologien sind genau dann gleich wenn die selben Filter gegen die selben Punkte konvergieren.*

Beweis. Wenn beide Topologien gleich sind haben sie die selben offenen Mengen und damit die selben Umgebungsfilter. Da die Konvergenz eines Filters gegen einen Punkt nur von dem Filter selbst und dem Umgebungsfilter abhängt ist klar, dass die selben Filter gegen die selben Punkte konvergieren. Für die umgekehrte Richtung sei x ein beliebiger Punkt aus X, U(x) der Umgebungsfilter mit der Topologie τ und U'(x) der Umgebungsfilter mit der Topologie τ'. Umgebungsfilter konvergieren natürlich immer in der jeweiligen Topologie. Da nach Annahme die selben Filter auf X gegen die selben Punkte konvergieren gilt:

$$U(x) \subseteq U'(x) \text{ und } U'(x) \subseteq U(x).$$

Das folgt direkt aus der Definition der Filterkonvergenz. Damit gilt U(x)=U'(x) und beide Topologien haben die selben Umgebungsfilter. Da die offenen Mengen gerade die Umgebungen sind die Umgebung all ihrer Punkte sind, folgt dass beide Topologien die selben offenen Mengen haben und damit gleich sind. □

Bemerkung 3.2.3. *Topologien werden also durch ihre Filterkonvergenz determiniert. Bei Folgen funktioniert dies nicht. Betrachte hierzu eine überabzählbare Menge X und die diskrete Topologie sowie die koabzählbare Topologie auf X (Definition 3.1.2 und 3.1.3).*

Es ist leicht einzusehen, dass in der koabzählbaren Topologie die einzigen konvergenten Folgen diejenigen sind, welche am Ende konstant sind. Wäre ein Grenzwert x von unendlich vielen x_n verschieden, könnte man diese Grenzwerte in eine abzählbare Menge tun. Das Komplement davon wäre in der koabzählbaren Topologie, d.h. offen und enthält x. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Konvergenz.

Für die diskrete Topologie lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, d.h. wir haben zwei offenbar unterschiedliche Topologien, in der die selben Folgen gegen die selben Grenzwerte konvergieren.

Es folgt nun die Verallgemeinerung des aus der Analysis bekannten Satzes, dass ein metrischer Raum M genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt, für allgemeine topologische Räume:

Satz 3.2.4 (Filterkompaktheit)**.** *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt wenn alle Ultrafilter auf X konvergieren.*

Beweis. Angenommen X ist kompakt, aber ein Ultrafilter φ auf X konvergiert nicht. Damit gibt es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung die nicht in φ enthalten ist. Sei

$$\mathcal{O} = \{O : O \text{ offen}, O \notin \varphi\}.$$

Es gilt $\bigcup \mathcal{O} = X$ und da X kompakt ist existiert eine endliche Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}$ mit $\bigcup \mathcal{E} = X$. Nach Lemma 2.2.3(3) (Ultrafilterlemma) ist ein Element von $\mathcal{E}$ in φ enthalten. Widerspruch

Angenommen nun jeder Ultrafilter konvergiert, aber X ist nicht kompakt. Sei $\mathcal{O}$ eine Menge von offenen Mengen mit $\bigcup \mathcal{O} = X$, so dass für keine endliche Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{O}$ gilt dass $\bigcup \mathcal{E} = X$.

Sei

$$B = \{X - \bigcup E : E \subseteq \mathcal{O}, \text{ E endlich}\}$$

Wenn $Y \in B$ und $Z \in B$ dann ist $Y \cap Z$ nichtleer. Damit ist $\{W \supseteq A : A \in B\}$ ein Filter der von einem konvergenten Ultrafilter umfasst wird (Bemerkung 2.2.2). Dieser Filter konvergiert gemäß der Annahme gegen ein x. Dieses x ist in einem $U_x \in \mathcal{O}$ enthalten. Da φ gegen x konvergiert gilt $U_x \in \varphi$. Aber auch $X - U_x \in \varphi$. Widerspruch $\square$

4 Filter und Abbildungen

Dieses Kapitel teilt sich deutlich in zwei Abschnitte. Während im ersten auf mehr oder weniger allgemeine Eigenschaften von Filter unter Abbildungen eingegangen wird, wird im zweiten Abschnitt ein sehr interessantes Lemma vorgestellt, welches für den Beweis eines Fixpunktsatzes von großer Bedeutung ist.

4.1 Allgemeines über Abbildungen von Filtern

Zu Beginn dieses Abschnittes wird aufgezeigt, wie sich die Bilder von Filterbasen, Filtern und Ultrafiltern darstellen. Anschließend werden Urbilder betrachtet. Zum Abschluss dieses Abschnitts wird der Begriff der Folgenstetigkeit mit Hilfe der Konvergenz von Filtern vom metrischen Raum in den topologischen Raum verallgemeinert.

Satz 4.1.1. *Seien X und Y nichtleere Mengen. Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Ist $\mathscr{U}$ eine Filterbasis auf X, so ist $f(\mathscr{U}) = \{f(A) | A \in \mathscr{U}\}$ eine Filterbasis auf Y.*

Beweis. Sind $A_1, A_2 \in \mathscr{U}$, so existiert ein $A \in \mathscr{U}$ mit $A \subseteq A_1 \cap A_2$, und es gilt

$$f(A) \subseteq f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

Ferner gilt $F(A) \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathscr{U}$. Folglich ist $F(\mathscr{U})$ eine Filterbasis. □

Ist φ ein Filter auf X, so ist $f(\varphi)$ im Allgemeinen kein Filter auf Y, erzeugt jedoch einen Filter $[f(\varphi)] = \{B \supseteq f(P) | B \subseteq Y, P \in \varphi\}$ auf Y. $[f(\varphi)]$ heißt der Bildfilter von φ unter der Abbildung f. Da wir uns stärker für den von der Basis erzeugten Filter als für die Basis an sich interessieren, ist im folgenden mit $f(\varphi)$ der Einfachheit halber bereits der erzeugte Filter gemeint.

Nun stellt sich die Frage, wie sich Ultrafilter unter allgemeinen Abbildungen verhalten:

Proposition 4.1.2. *Seien X,Y nichtleere Mengen und φ ein Ultrafilter auf X und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $f(\varphi)$ ein Ultrafilter auf Y.*

Beweis. Sei B eine beliebige Teilmenge von Y. Dann ist natürlich $f^{-1}(B)$ eine Teilmenge von X. Laut Lemma 2.2.3 (Ultrafilterlemma) gilt dann entweder

$$f^{-1}(B) \in \varphi \text{ oder } X \setminus f^{-1}(B) \in \varphi.$$

Im ersten Fall folgt sofort $f(f^{-1}(B)) \in f(\varphi)$, also wegen $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ auch $B \in f(\varphi)$. Im zweiten Fall haben wir analog $f(X \setminus f^{-1}(B)) \in f(\varphi)$, also wegen $f(X \setminus f^{-1}(B)) \subseteq Y \setminus B$ auch $Y \setminus B \in f(\varphi)$. Es folgt somit, wiederrum nach Lemma 2.2.3, dass $f(\varphi)$ ein Ultrafilter auf Y ist. □

Proposition 4.1.3. *Seien X,Y nichtleere Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion.*

(1) Ist φ ein Filter auf X und $B \subseteq Y$, dann gilt:

$$B \in f(\varphi) \Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \varphi$$

(2) Sei φ_1 eine Filterbasis und φ_2 eine Filtersubbasis auf X. Dann folgt aus $[\varphi_1] \supseteq \varphi_2$ stets, dass $f([\varphi_1]) \supseteq [f(\varphi_2)]$ gilt.

(3) Ist $(\chi_i)_{i\in I}$ eine Familie von Filtern auf X, so gilt:

$$f(\bigcup_{i\in I} \chi_i) = \bigcup_{i\in I} f(\chi_i).$$

Beweis. (1) Sei $B \in f(\varphi)$. Dann existiert $A \in \varphi$ mit $f(A) \subseteq B$ und folglich

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(B),$$

so dass $f^{-1}(B)$ als Obermenge von A auch Element von φ sein muss. Die Rückrichtung ist trivial.

(2)Sei $S \in [f(\varphi_2)]$. Dann haben wir also $S_1, ..., S_n \in \varphi_2$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} f(S_i) \subseteq S.$$

Diese S_i liegen wegen $[\varphi_1] \supseteq \varphi_2$ auch in $[\varphi_1]$, also auch ihr Durchschnitt. Wegen

$$f(\bigcap_{i=1}^{n} S_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} f(S_i) \subseteq S$$

liegt demnach auch S in $f([\varphi_1])$.

(3)
$A \in f(\bigcap_{i\in I} \chi_i) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \bigcap_{i\in I} \chi_1 \Leftrightarrow \forall i \in I : f^{-1}(A) \in \chi_i \Leftrightarrow \forall i \in I : A \in f(\chi_i) \Leftrightarrow A \in \bigcap_{i\in I} f(\chi_i)$. □

Proposition 4.1.4. *Seien X,Y nichtleere Mengen, ψ ein Filter auf Y und $f : X \to Y$ eine Funktion. Die Familie $f^{-1}(\psi) := \{f^{-1}(S) | S \in \psi\}$ ist genau dann eine Filterbasis auf X, wenn der Durchschnitt von f(X) mit allen Elementen von ψ nichtleer ist.*

Beweis. Sei

$$\forall S \in \psi : f(X) \cap S \neq \emptyset.$$

Dann folgt, dass $\forall S \in \psi : f^{-1}(S) \neq \emptyset$ gilt. Da außerdem

$$\forall S, T \subseteq Y : f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T) = f^{-1}(S \cap T)$$

gilt, können wir mit Proposition 2.3.3 sofort folgern, dass $f^{-1}(\psi)$ eine Filterbasis auf X ist.

Ist $f^{-1}(\psi)$ eine Filterbasis, so enthält sie $\emptyset$ nicht, woraus folgt, dass $\forall S \in \psi : f(X) \cap S \neq \emptyset$ gilt. □

Lemma 4.1.5. *Seien X;Y nichtleere Mengen, φ ein Filter auf X, $f : X \to Y$ eine Funktion und ψ ein Ultrafilter auf Y mit $\psi \supseteq f(\varphi)$.*

Dann gibt es einen Ultrafilter φ_0 auf X mit $\varphi_0 \supseteq \varphi$ und $f(\varphi_0) = \psi$.

Beweis. Da $f(\varphi)$ und somit auch ψ natürlich f(X) enthält, können wir mit obiger Proposition 4.1.4 sofort folgern, dass $f^{-1}(\psi)$ eine Filterbasis ist.

Seien nun $U \in \varphi$ und $V \in \psi$ beliebig gewählt.

Wir wollen zeigen, dass nun $U \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ gilt. Wegen $\psi \subseteq f(\varphi)$ ist zumindest $f(U) \in \psi$ und daher $f(U) \cap V \neq \emptyset$. Es existiert ein Element $y \in f(U) \cap V$ und, da es in f(U) liegt folglich auch ein $u \in U$ mit f(u)=y. Da y=f(u) auch ein Element von V ist, folgt $u \in f^{-1}(V)$, insgesamt also

$$U \in f^{-1}(V) \cap U,$$

d.h. der Durchschnitt ist nicht leer. Da dies für beliebige $U \in \varphi, V \in \psi$ gilt, folgt aus Proposition 2.2.3(3), dass $\varphi \cup f^{-1}(\psi)$ eine Filtersubbasis ist. Sei φ' der von dieser Filtersubbasis erzeugte Filter auf X. Es gilt offensichtlich $\varphi' \supseteq \varphi$ und $\varphi' \supseteq f^{-1}(\psi)$. Nach Bemerkung 2.2.2 exisitert ein Ultrafilter φ_0 auf X mit $\varphi_0 \supseteq \varphi'$. Für diesen gilt ebenfalls $\varphi_0 \supseteq \varphi$ und $\varphi_0 \supseteq f^{-1}(\psi)$. Aus Proposition 4.1.3 folgt, dass

$$f(\varphi_0) \supseteq f(\varphi) \text{ und } f(\varphi_0) \supseteq [f(f^{-1}(\psi))].$$

Nun folgt aus dem allgemeinen Umstand, dass für Teilmengen B von Y stets $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ gilt, dass $[f(f^{-1}(\psi))] \supseteq \psi$ gilt. Damit haben wir $f(\varphi_0) \supseteq \psi$, was wegen der Maximalität von ψ sofort $f(\varphi_0) = \psi$ impliziert. ☐

Satz 4.1.6. *Seien (X,τ) und (X',τ') zwei Topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to X'$ ist genau dann stetig, wenn für jeden gegen x konvergierenden Filter φ in X auch $f(\varphi)$ gegen f(x) konvergiert.*

Beweis. Sei f stetig, $x \in \lim \varphi$ und U(f(x)) eine Umgebung von f(x). Wir wollen zeigen dass die Umgebung U im Bildfilter $f(\varphi)$ liegt. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von x und da $x \in \lim \varphi$ haben wir $f^{-1}(U) \in \varphi$ (Definition der Filterkonvergenz). Da U eine beliebige Umgebung war, liegen alle Umgebungen von f(x) in $f(\varphi)$ und damit $f(x) \in \lim f(\varphi)$.

Für die umgekehrte Richtung betrachten wir lediglich die Umgebungsfilter. Das Bild des Umgebungsfilters U(x) konvergiert nach Annahme gegen f(x). Um zu beweisen dass f stetig ist müssen wir zeigen, dass die Urbilder von Umgebungen von f(x) Umgebungen von x sind. Sei U eine Umgebung von f(x). Da

$$f(U(x)) = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in U(x)\}$$

haben wir $f^{-1}(U) \in U(x)$. Da U(x) gerade die Menge aller Umgebungen von x ist, ist damit $f^{-1}(U)$ Umgebung von x. ☐

4.2 Zerlegungslemma und Fixpunktsatz

Kommen wir nun zu einem zunächst sehr seltsam anmutenden Lemma, dem Zerlegungslemma, dessen Aussage uns nachher sehr schnell einen eleganten Beweis eines hochgradig interessanten Fixpunktsatzes liefert.

Lemma 4.2.1 (Zerlegungslemma). *Sei X eine Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung von X in sich. Dann gibt es eine Zerlegung $X = F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$ mit*

(1) $$\forall x \in F : f(x) = x,$$

(2) $$X_i \cap X_j = \emptyset \textit{ für } i \neq j$$

(3) $$f(X_i) \cap X_i = \emptyset \textit{ für } i = 1, 2, 3.$$

Beweis. Setze $F := \{x \in X | f(x) = x\}$. Sei weiterhin

$$\mathscr{U} := \left\{ (A_1, A_2, A_3) \in \mathscr{P}(X \setminus F)^{x3} \,\middle|\, \begin{array}{l} A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \\ f(A_i) \subseteq F \cup \bigcup_{j \neq i} A_j \text{ für } i = 1, 2, 3 \end{array} \right\}$$

Da zumindest $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in \mathscr{U}$ gilt, ist $\mathscr{U}$ nicht leer. Wir suchen maximale Elemente in $\mathscr{U}$ bezüglich der komponentenweise Inklusionsrelation $\subseteq^{x3}$ auf $\mathscr{U}$. Das bedeutet:

$$(A_1, A_2, A_3) \subseteq^{x3} (B_1, B_2, B_3) :\Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, 3\} : A_i \subseteq B_i$$

Die Existenz wird durch das Zorn'sche Lemma gesichert, wenn wir zeigen können, dass jede total geordnete Teilmenge von $\mathscr{U}$ eine obere Schranke in $\mathscr{U}$ hat. Sei also $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{U}$ total geordnet bezüglich $\subseteq^{x3}$. Setze:

$$C_i := \bigcup_{(B_1, B_2, B_3) \in B} B_i$$

für i=1,2,3. Hier folgte aus $x \in C_i \cap C_j$ bei $i \neq j$ sogleich die Existenz von $(B_1, B_2, B_3), (B_1', B_2', B_3') \in \mathscr{B}$ mit $x \in B_i \cap B_j'$ also auch $x \in B_i \cap B_j$ oder $x \in B_i' \cap B_j'$, weil $B_i \subseteq B_i'$ oder $B_j \subseteq B_j'$ wegen der totalen Ordnung auf $\mathscr{B}$ gilt im Widerspruch zur Konstruktion von $\mathscr{U} \supseteq \mathscr{B}$. Weiterhin ist klar, dass

$$f(C_i) \subseteq F \cup \bigcup_{j \neq i} C_j$$

für i=1,2,3 gilt, da entsprechendes für alle vereinigten B_i gilt.

Somit liegt (C_1, C_2, C_3) in $\mathscr{U}$ und ist eine obere Schranke für $\mathscr{B}$ bezüglich $\subseteq^{x3}$. Nun können wir das Zorn'sche Lemma anwenden. Sei (X_1, X_2, X_3) ein maximales Element von $\mathscr{U}$ bezüglich $\subseteq^{x3}$. Wir wollen jetzt nicht mehr lange herumkonstruieren und behaupten: $X = F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

Angenommen, dies gelte nicht. Dann gäbe es ein

$$x \in X \setminus (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3).$$

Bilde

$$O := \{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$$

(mit $f^{(0)}$ ist x selbst gemeint) und unterscheiden folgende Fälle:

1. $O \setminus (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ ist unendlich (und somit $O \cap (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \emptyset$).

   Dann setzen wir
   $$X_1' := X_1 \cup \{f^{2n}(x) | n \in \mathbb{N}\} \text{ und } X_2' := X_2 \cup \{f^{2n+1}(x) | n \in \mathbb{N}\}$$
   wodurch wir
   $$(X_1, X_2, X_3) \subset^{x3} X_1', X_2', X_3') \in \mathcal{U}$$
   erhalten, im Widerspruch zur Maximalität von (X_1, X_2, X_3).

2. $O \setminus (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ ist endlich.

   Dann sei m die kleinste natürliche Zahl, für die
   $$f^m(x) \in \{f^k(x) | k < m\} \cup (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3)$$
   gilt. Wir unterscheiden noch etwas subtiler:

   a) Gilt
   $$f^m(x) \in (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3),$$
   so kann $f^m(x)$ nach Konstruktion von $\mathcal{U}$ in höchstens einem der X_i enthalten sein, so dass wir X_j mit $f^m(x) \notin X_j$ wählen können. Dann setzen wir $X_j' := X_j \cup \{f^{m-1}(x)\}$, und finden
   $$f(X_j') = f(X_j) \cup \{f^m(x)\} \subseteq F \cup \bigcup_{i \neq j} X_i,$$
   sowie immer noch $X_i \cap X_j' = \emptyset$ für $i \neq j$, da ja
   $$f^{m-1}(x) \in F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$$
   gilt. Somit haben wir $X_i' := X_i$ für $i \neq j$ sogleich $(X_1', X_2', X_3') \in \mathcal{U}$, und $X_j \subset X_j'$, im Widerspruch zur Maximalität von (X_1, X_2, X_3).

   b) Gilt
   $$f^m(x) \notin (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3),$$
   so existiert k<m mit $f^k(x) = f^m(x)$. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Wahl von m. Setzen wir nun $y := f^k(x)$ und $P := \{f^h(y) | 0 \leq h < m - k\}$, so finden wir natürlich $P \cap (F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3) = \emptyset$. Ferner ist $m - k \geq 2$, da sonst $f^m(x) = f^{m-1}(x)$ und somit $f^{m-1} \in F$ folgte. Setzen wir nun

   $P_1 := \{y\};$

   $P_2 := \{f^{2n}(y) | n \in \mathbb{N}, 0 < 2n < m - k\}$ und

   $P_3 := \{f^{2n+1}(y) | n \in \mathbb{N}, 0 < 2n + 1 < m - k\}.$

   Dann gilt offenbar $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $P_1 \cup P_2 \cup P_3 = P$ sowie $f(P_1) \subseteq P_3$, $f(P_2) \subseteq P_3 \cup P_1$ und $f(P_3) \subseteq P_2 \cup P_1$. Mit $X_i' := X_i \cup P_i, i = 1, 2, 3$ finden wir also $(X_1', X_2', X_3') \in \mathcal{U}$ und
   $$(X_1, X_2, X_3) \subset^{x3} X_1', X_2', X_3')$$
   im Widerspruch zur Maximalität von (X_1, X_2, X_3).

Da es bei obiger Annahme in jedem Fall zu einem Widerspruch führt, muss

$$X = F \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

wie gefordert gelten. Wegen der paarweisen Disjunktheit der X_i und $X_i \subseteq X \setminus F$ sowie $f(X_i) \subseteq F \cup \bigcup_{j \neq i} X_j \subseteq X \setminus X_i$ nach Konstruktion von $\mathscr{U}$ hat unsere Zerlegung auch die Eigenschaft (3). □

Wir haben sogar mehr bewiesen, als die reine Aussage des Zerlegungsemmas. Es wurde zusätzlich gezeigt, dass jedes maximale Element der oben definierten Menge $\mathscr{U}$ eine Zerlegung mit den im Lemma angegeben Eigenschaften liefert.

Korollar 4.2.2. *Sei X eine Menge, $f : X \to X$ eine Abbildung und φ ein Ultrafilter auf X. Dann gilt entweder*

(1) $\exists F \in \varphi : \forall x \in F : f(x) = x$ *oder*

(2) $\exists U \in \varphi : f(U) \cap U = \emptyset$

Beweis. Folgt direkt aus Lemma 2.2.3(Ultrafilter-Lemma) und dem Zerlegungslemma 4.2.1. □

Es folgt der Haupsatz dieses Abschnitts, dessen Beweis dank obiger Vorüberlegungen sehr schnell erbracht ist.

Satz 4.2.3 (Fixpunktsatz)**.** *Sei X eine Menge, $f : X \to X$ eine Abbildung und φ ein Ultrafilter auf X mit $f(\varphi) = \varphi$. Dann existiert $F \in \varphi$ mit $\forall a \in F : f(a) = a$.*

Beweis. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \cap f(U) = \emptyset$ kann φ wegen $f(\varphi) \subseteq \varphi$ nicht enthalten und muss somit nach obigem Korollar 4.2.2 die nichtleere Fixpunktmenge F von f enthalten. □

5 Netze

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst untersuchen, in welchen topologischen Räumen die uns bekannten Begriffe und Techniken nicht ausreichen um diese zu beschreiben und diese dann so zu erweitern und verallgemeinern, dass wichtige Begriffe und metrische Konzepte anwendbar bleiben. Dabei werden wir auf die Netze stoßen, eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffs.

5.1 Metrisierbarkeit und Abzählbarkeit

Definiton 5.1.1 (Umgebungsbasis). *Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Ein System $\mathcal{K}$ von Umgebungen von x_0 heißt Umgebungsbasis von x_0, wenn in jeder Umgebung von x_0 aus $\mathcal{K}$ eine weitere Umgebung aus $\mathcal{K}$ als Teilmenge enthalten ist.*

Definiton 5.1.2 (Abzählbarkeit). *Eine Menge M heißt abzählbar, wenn die Elemente von M als Folge geschrieben werden können. Also dann, wenn die Menge M injektiv auf $\mathbb{N}$ abbildbar ist.*

Axiom 5.1.3 (Erstes Abzählbarkeitsaxiom). *Ein topologischer Raum (X,τ) erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom, wenn jeder Punkt $x_0 \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.*

Jetzt wollen wir uns nochmal kurz an die Folgenkonvergenz erinnern:

Satz 5.1.4. *Sei $A \subset X$ und X erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn eine gegen x konvergente Folge von Elementen aus A existiert.*

Beweis. Zu zeigen: (1) Es existiert eine gegen x konvergente Folge von Elementen aus A $\Rightarrow x \in \overline{A}$. (2) $x \in \overline{A} \Rightarrow$ Es existiert eine gegen x konvergente Folge von Elementen aus A.

(1) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in A, aber $x \notin \overline{A}$. Dann gibt es eine Umgebung U_x von x, deren Schnitt mit $\overline{A}$ leer ist. Widerspruch zur Konvergenz.

(2) Sei $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von $x \in \overline{A}$ mit $\mathcal{K}_n \supseteq \mathcal{K}_{n+1}$. Dann liegt nach Definition des Abschlusses in jedem $\mathcal{K}_n$ mindestens ein Element aus A. Es existiert also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A \cap \mathcal{K}_n$. Nun gilt für eine beliebige Umgebung U_x: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{K}_{n_0} \subseteq U_x$. Dann gilt für $n \geq n_0$: $a_n \in \mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_{n_0} \subseteq U_x$, was die Konvergenz impliziert. □

Dies funktioniert, wie in Bemerkung 3.2.3. am Beispiel der koabzählbaren Topologie dargelegt, dann nicht mehr wenn das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist, das heißt wenn es also keine abzählbare Umgebungsbasis gibt. An dieser Stelle werden dann Filter oder auch Netze benötigt. Ein Beispiel für Räume, die das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllen ist:

Satz 5.1.5. *Produkte überabzählbar vieler metrischer Räume (z.B. die Topologie τ der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) erfüllen das erste Abzählbarkeitsaxiom nicht.*

Beweis. Wir beweisen den Satz für $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})= \prod \mathbb{R}_i(i \in \mathbb{R})$, der allgemeine Fall folgt analog. Sei $f \equiv O$ und $U_n(f), n \in \mathbb{N}$, eine abzählbare Umgebungsbasis aus offenen Mengen; dann kan o.B.d.A. angenommen werden, dass jedes U_n von der Form $\prod O_i(i \in \mathbb{R}), O_i$ offen in $\mathbb{R}$ und $O_i \neq \mathbb{R}$ nur für endlich viele $i_{1,n}$,..., $i_{k,n} \in \mathbb{R}$ ist. Sei nun $m \neq i_{j,1}$ für alle $j, 1 = 1, 2, \ldots$, und $U = \prod O_i, O_n$ offen in $\mathbb{R}$, $O_n \neq \mathbb{R}$ und $O_i = \mathbb{R}$ für alle $i \neq n$. Dann ist U Umgebung von f, aber es gibt kein $U_n \subset U$; Widerspruch. □

Ausnahme: Ein Produkt von überabzählbar vielen einelementigen metrischen Räumen hat selbst nur ein Element und erfüllt daher selbstverständlich das erste Abzählbarkeitsaxiom.

Satz 5.1.6. *Sei (X,τ) ein topologischer Raum. Ist (X,τ) metrisierbar, so erfüllt (X,τ) das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei d eine Metrik, die die Topologie von (X,τ) induziert und $x_0 \in X$. Dann ist die Menge $\mathcal{K} = \{K_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ der Kugeln mit dem Radius $\frac{1}{n}$ bezüglich d eine abzählbare Umgebungsbasis von x_0. □

Aus Satz 5.1.5. und Satz 5.1.6 folgt, dass es Räume gibt, die nicht metrisierbar sind. Es muss aber auch in solchen Räumen nicht auf wichtige metrische Konzepte wie zum Beispiel Beschränktheit, Kompaktheitskriterien oder gleichmäßige Stetigkeit verzichtet werden. Solche Räume lassen sich, statt durch eine einzige Metrik, nun gar durch ein System von bestimmten Distanzfunktionen beschreiben.

Definiton 5.1.7 (Pseudometrik)**.** *Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $d(x, y) \geq 0, d(x, x) = 0$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dann heißt d eine Pseudometrik auf X.

Die Pseudometrik unterscheidet sich von einer Metrik nur in dem Fehlen der Forderung $d(x, y) > 0$ für $x \neq y$.

Definiton 5.1.8 (System von Pseudometriken)**.** *Sei X eine Menge und $\mathcal{D}$ eine Familie von Pseudometriken auf X mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $d_1, d_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow d_1 \vee d_2 \in \mathcal{D}$

(2) Für je zwei Punkte $x \neq y$ aus X existiert ein $d \in \mathcal{D}$ mit $d(x, y) > 0$

Dann heißt $\mathcal{D}$ ein System von Pseudometriken auf X.

Jedes System von Pseudometriken $\mathscr{D}$ induziert eine Topologie $\sigma_{\mathscr{D}} = \sigma$. Als Umgebungsbasis der Elemente von X dient die Menge der Pseudokugeln $K_{d,\epsilon}(x_0) = \{x \in X / d(x, x_0) < \epsilon\}, d \in \mathscr{D}, \epsilon > 0$. Diese Mengen erfüllen die für eine Umgebungsbasis notwendigen Axiome und somit ist σ eindeutig bestimmt.

Definiton 5.1.9 (Abschluss). *Sei $A \subset X$ mit der Topologie σ. Ein Element aus X ist genau dann im Abschluss von A enthalten wenn der Schnitt jeder Umgebung eines Punktes aus X mit der Menge A nichtleer ist und somit, wenn für jede Pseudometrik aus $\mathscr{D}$ und jedes $\epsilon > 0$ ein Punkt $a \in A$ exitiert, für den gilt: $d(x, a) < \epsilon$. Letztendlich gilt: $\overline{A} = \cap\{x \in X / d(x, A) = 0\}, d \in \mathscr{D}$.*

5.2 Einführung der Netze

In metrisierbaren Räumen kann der Abschluss einer Menge durch Folgenkonvergenz beschrieben werden. Im Gegensatz zu diesen genügen Produkte überabzählbar vieler metrischer Räume (Satz 5.1.5.) nicht mehr dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. Daher wollen wir den Folgenbegriff verallgemeinern um einen sinnvollen Konvergenzbegriff zu erlangen und ihn gleich auf beliebige topologische Räume ausdehnen.

Definiton 5.2.1. *Eine (partiell) geordnete Menge $(X, \leq)$ heißt nach oben gerichtet, wenn zu je zwei Elementen $x, y \in X$ ein Element $z \in X$ existiert, sodass $x \leq z$ und $y \leq z$ gilt. Beispiel: $(\mathbb{N}, \leq)$*

Definiton 5.2.2 (Netz). *Sei (X, τ) ein toplogischer Raum. Ein Netz ist nun eine Abbildung von einer gerichteten Menge I nach X. Ist $I = \mathbb{N}$, so erhält man eine Folge. Man kann schön sehen, warum Netze als Verallgemeinerung von Folgen angesehen werden können. Netze werden manchmal auch Moore-Smith-Folgen genannt.*

Definiton 5.2.3 (Konvergenz). *Sei $\mathscr{N} : I \to X$ ein Netz in X und sei $A \subset X$. Dann sagt man:*

(1) "$\mathscr{N}$ ist in A", wenn $x_i \in A$ für alle $i \in I$ gilt.

(2) "$\mathscr{N}$ ist schließlich in A", wenn gilt: Es existiert ein $i_0 \in I$, sodass $x_i \in A$ für alle $i \geq i_0$.

(3) "$\mathscr{N}$ ist immer wieder in A", wenn für jedes $i_0 \in I$ ein $i \geq i_0$ existiert, sodass $x_i \in A$ ist.

(4) Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungswert des Netzes $\mathscr{N}$, falls $\mathscr{N}$ immer wieder in jeder Umgebung von x ist.

(5) Der Punkt x heißt Grenzwert des Netzes $\mathscr{N}$, $x = \lim x_i$, wenn $\mathscr{N}$ schließlich in jeder Umgebung von x ist. Man sagt dann, $\mathscr{N}$ konvergiert gegen x.

Genau wie bei Folgen ist die Konvergenz von Netzen in allgemeinen topologischen Räumen nicht eindeutig. Hier kommen die Hausdorff-Räume ins Spiel.

Definiton 5.2.4 (Hausdorffsches Trennungsaxiom). *Sei (X, τ) ein toplogischer Raum. (X, τ) heißt Hausdorff-Raum genau dann, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X, x \neq y$, offene Umgebungen U_x*

von x und U_y von y gibt, mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Satz 5.2.5. *Der Grenzwert jedes konvergenten Netzes $\mathscr{N}$ in X ist genau dann eindeutig, wenn (X,τ) ein Hausdorff-Raum ist.*

Beweis. Zu zeigen: (1) X ist ein Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ Der Grenzwert eines konvergenten Netzes $\mathscr{N}$ in X ist eindeutig. (2) X ist kein Hausdorff-Raum $\Rightarrow$ Der Grenzwert eines konvergenten Netzes $\mathscr{N}$ in X ist nicht eindeutig.

(1) Sei X ein Hausdorff-Raum und x, y Grenzwerte des Netzes $\mathscr{N}$ mit $x \neq y$. Dann gibt es disjunkte Umgebungen U_x und U_y. Widerspruch zur Konvergenzdefinition.

(2) Sei X kein Hausdorff-Raum und x, y zwei Punkte mit $x \neq y$. Dann gilt für alle Umgebungen U_x und U_y: $U_x \cap U_y \neq \emptyset$. Die Familie aller Mengen der Form $U_x \cap U_y$ bilden dann eine bezüglich inverser Inklusion gerichtete Menge I. Für jedes $i = U_x \cap U_y \in I$ sei $x_i \in U_x \cap U_y$. Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X, welches schließlich in jeder Umgebung von x liegt und daher gegen x konvergiert. Es liegt aber auch schließlich in jeder Umgebung von y und konvergiert also auch gegen y. □

Wir werden nun die Topologie τ eines Raumes X durch konvergente Netze beschreiben, indem wir den Abschluss einer Menge durch die konvergenten Netze beschreiben.

Satz 5.2.6. *Sei $A \subset X$ und $x \in X$. Dann ist $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn ein Netz von Elementen aus A existiert, welches gegen x konvergiert.*

Beweis. Zu zeigen: (1) $x \in \overline{A} \Rightarrow$ Es existiert ein Netz von Elementen aus A, welches gegen x konvergiet. (2) Es existiert ein Netz von Elementen aus A, welches gegen x konvergiet $\Rightarrow$ $x \in \overline{A}$.Zu zeigen: (1) $x \in \overline{A} \Rightarrow$ Es existiert ein Netz von Elementen aus A, welches gegen x konvergiert. (2) Es existiert ein Netz von Elementen aus A, welches gegen x konvergiert $\Rightarrow x \in \overline{A}$.

(1) Sei $x \in \overline{A}$ und $\mathscr{K}$ eine Umgebungsbasis von x. $\mathscr{K}$ ist bezüglich inverser Inklusion gerichtet. Für alle $U_x \in \mathscr{K}$ sei x_{U_x} ein beliebiges Element von $U_x \cap A$. Dann ist $x = \lim x_{U_x}$.

(2) Folgt sofort, da in jeder Umgebung U_x fast alle Elemente des Netzes liegen. □

5.3 Verfeinerung von Netzen

Definiton 5.3.1. *Ein Netz $\mathscr{N}' = (y_k), k \in K$ heißt feiner als das Netz $\mathscr{N} = (x_i), i \in I$, wenn eine monotone Abbildung $\psi : K \to I$ existiert, so dass für jedes $i_0 \in I$ ein $k_0 \in K$ existiert mit $\psi(k) \geq i_0$ für alle $k \geq k_0$ und $y_k = x_{\psi(k)}$ für alle $k \in K$ erfüllt ist.*

Ein Beispiel mit Hilfe von Folgen ist: Sei $I = \mathbb{N}$. Dann ist das Netz (x_n) eine Folge. Sei nun weiterhin (x_{n_k}) eine Teilfolge von (x_n), dann ist (x_{n_k}) ein feineres Netz als (x_n).

Als nächstes wollen wir nun einen Satz behandeln, der es uns erlaubt von Folgen Bekanntes auf die Netze zu übertragen und so in allgemeinen Hausdorff-Räumen anwendbar machen zu können.

Satz 5.3.2. *(1) Ist ein Punkt x Häufungswert eines Netzes $\mathcal{N}$', welches feiner als das Netz $\mathcal{N}$ ist , dann ist x auch Häufungswert von $\mathcal{N}$. (2) Ist x Grenzwert eines Netzes $\mathcal{N}$, dann auch von jedem feineren Netz. (3) Ist x Häufungswert eines Netzes $\mathcal{N}$, dann existiert ein feineres Netz $\mathcal{N}$', welches gegen x konvergiert.*

Beweis. (1) Sei x Häufungswert des Netzes $\mathcal{N}$'$= (y_k), k \in K$, welches feiner als das Netz $\mathcal{N} = (x_i), i \in I$ ist. Sei $\psi : K \to I$ die zugehörige Abbildung, so dass $y_k = x_{\psi(k)}$ ist. Seien U_x und $i_0 \in I$ beliebig. Dann existiert ein $k_0 \in K$, so dass für $k \geq k_0$ gilt: $\psi(k) \geq i_0$. Da x Häufungswert von $\mathcal{N}$' ist, existiert $k' \in K$ mit $k' \geq k_0$ und $y_{k'} \in U$. Daher ist $x_{\psi(k')} = y_{k'} \in U_x$ und $\psi(k') \geq i_0$. Daher ist x nach Definition auch Häufungswert von $\mathcal{N}$.

(2) Sei $x = \lim x_i$ und sei $\mathcal{N}$'$= (y_k), k \in K$ ein beliebiges Netz, welches feiner als $\mathcal{N}$ ist, sowie $\psi : K \to I$ die zugehörige Abbildung. Sei U_x beliebig. Dann existiert ein $i_0 \in I$, so dass für $i \geq i_0$ gilt: $x_i \in U_x$. Sei schließlich $k_0 \in K$, so dass $\psi(k) \geq i_0$ für alle $k \geq k_0$ gilt. Dann ist: $y_k = x_{\psi(k)} \in U_x$ für $k \geq k_0$. $\Rightarrow x = \lim y_k$.

(3) Sei x Häufungswert von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{K}$ eine Umgebungsbasis von x. Wir betrachten die Menge K aller geordneten Paare $k = (i, U_x)$, wobei $i \in I$ und $U_x \in \mathcal{K}$ ist , mit $x_i \in U_x$. Wir setzen $(i_1, U_{x_1}) \leq (i_2, U_{x_2})$, wenn $i_1 \leq i_2$ und $U_{x_2} \subset U_{x_1}$. Dann ist K eine gerichtete Menge. Wir betrachten das Netz $\mathcal{N}$'$= (y_k), k \in K$ mit $y_k = y_{(i,U_x)} = x_i$. Dieses Netz $\mathcal{N}$' ist feiner als $\mathcal{N}$, weil $\psi(k) = \psi(i, U_x) = i$ monoton ist und K auf X abbildet. Für eine beliebige Umgebung $U_x \in \mathcal{K}$ existiert $i \in I$ mit $x_i \in U_x$. Da für $k \geq (i, U_x)$ gilt: $y_k \in U_x$, ist $x = \lim y_k, k \in K$. □

Definiton 5.3.3 (Universelle Netze). *Ein Netz $\mathcal{N} = (x_i), i \in I$, heißt universell in X oder ultrafein in X, wenn für jede Teilmenge $A \subset X$ das Netz $\mathcal{N}$ entweder schließlich in A oder schließlich in $X \setminus A$ ist. Daraus ergibt sich unmittelbar:*

(1) Ein universelles Netz konvergiert gegen jeden seiner Häufungswerte.

(2) Ist $\mathcal{N}$ universell in X, dann ist es auch jedes feinere Netz.

(3) Ist $(x_i), i \in I$, universell in X und $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung, dann ist auch $(f(x_i))$ universell in Y.

5.4 Netze und Filter

Um zu verdeutlichen, auf welche Art und Weise Netze und Filter zusammenhängen wollen wir in diesem Abschnitt folgenden Satz beweisen.

Satz 5.4.1. *Zu jedem Netz $\mathcal{N} = (x_i), i \in I$, in X (hier genügt es anzumerken, dass X eine beliebige Menge ist) existiert ein universelles Netz, welches feiner als $\mathcal{N}$ ist.*

Jetzt benötigen wir die Definition des Filters (Definition 2.1.1.). Wir wollen uns erst mal fragen wie sich Filter bzw. Netze auseinander konstruieren lassen.

Ist nun ein Netz $\mathcal{N} = (x_i), i \in I$, in X gegeben, dann bildet das System aller Mengen in X, die eine Menge vom Typ $\mathcal{N}_i = \{x_j / j \geq i\}$ enthalten, offenbar einen Filter - den zu $\mathcal{N}$ gehörigen Filter $\varphi_{\mathcal{N}}$.

I sei die Menge aller Paare (p, F) mit $p \in F \in \varphi$, dann ist I mit der Ordnung $(p, F) \leq (p', F') \Longleftrightarrow F' \subset F$ gerichtet, und für $i = (p, F)$ sei $x_i = p$; $\mathcal{N}_{\varphi} = (x_i), i \in I$.

Es gilt: $\varphi_{\mathcal{N}_\varphi} = \varphi$, aber umgekehrt gilt $\mathcal{N}_{\varphi_{\mathcal{N}}} \neq \mathcal{N}$ für manche $\mathcal{N}$, weil es unter den verschiedenen Netzen, die den selben Filter erzeugen können, welche gibt für die man das Ausgangsnetz nicht zurück erhält.

Netze $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$', die denselben Filter erzeugen, haben allerdings die Eigenschaft, dass für jedes $A \subset X$ $\mathcal{N}$ genau dann schließlich in A liegt, wenn $\mathcal{N}$' schließlich in A liegt. Sie besitzen also diesselben Konvergenzeigenschaften und können daher als äquivalent angesehen werden. Durch diese Entsprechung von Filtern und Netzen wird ersichtlich, dass man die Konvergenztheorie topologischer Räume sowohl von Netzen, als auch von Filtern her aufbauen kann.

Nun folgt der Beweis des Satzes 5.5.1.: Man versucht, das Problem auf die Filter zu übertragen, bei denen die Existenz des Ultrafilters direkt aus Bemerkung 2.2.2. folgt und dann den gewonnenen Ultrafilter in ein universelles Netz zurückzuverwandeln.

Sei $\varphi_{\mathcal{N}}$ der zu dem Netz $\mathcal{N} = (x_i), i \in I$, gehörige Filter. Laut Bemerkung 2.2.2. gibt es zu jedem Filter einen Ultrafilter. Also ist μ ein $\varphi_{\mathcal{N}}$ umfassender Ultrafilter. $K = \{(i, \nu) / i \in I, \nu \in \mu$ und $x_i \in \nu\}$ ist bezüglich der Relation $(i, \nu) \geq (i', \nu') \Longleftrightarrow i \geq i'$ und $U \subset U'$ eine gerichtete Menge: Sind $k_1 = (i_1, \nu_1), k_2 = (i_2, \nu_2)$ Elemente von K, dann gibt es einen Index $i \in I$ mit $i \geq i_1$, $i \geq i_2$ und ein Element $x_j \in (\mathcal{N}_i = \{x_k / k \geq i\}) \cap (\nu_1 \cap \nu_2)$, da ja $\mathcal{N}_i \in \mathcal{N}_{\varphi} \subset \mu$ und je endlich viele Elemente aus μ nichtleeren Schnitt haben; $(x_j, \nu_1 \cap \nu_2)$ ist also größer als k_1 und k_2. Das Netz $\mathcal{N}' = (y_k), k \in K$, mit $y_k = x_i$ für $k = (i, \nu) \in K$ ist offenbar ein Teilnetz von $\mathcal{N}$ und universell. Denn sei $A \subset X$, dann können wir o.B.d.A. $A \in \mu$ annehmen und es gilt $y_{k'} \in A$ für alle $k' \geq k$, wobei $k = (j, A)$ sei für ein j mit $x_j \in \mathcal{N}_i \cap A, i$ ein Index aus I. $\square$

6 Anhang

6.1 Lemma von Zorn

Eine geordnete Menge ist eine Menge A mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation $\leq$ auf M, dh. für alle $a \in M$ gilt $a \leq a$, $a \leq b$ und $b \leq c$ implizieren $a \leq c$ und schließlich implizieren $a \leq b$ und $b \leq a$ dass $a = b$. Ein Element $m \in A$ heißt maximal, wenn es kein a gibt so dass $a \neq m$ und $m \leq a$. Eine Teilmenge $K \subseteq M$ heist Kette, wenn $a \leq b$ oder $b \leq a$ für zwei beliebige Elemente a und b von K gilt. Ein $o \in M$ heißt obere Schranke von einer Teilmenge $T \subseteq M$, wenn für alle $a \in T$ gilt $a \leq o$.

Zorns Lemma ist nun:

Satz 6.1.1 (Lemma von Zorn). *Wenn M eine geordnete Menge ist, in der jede Kette eine obere Schranke hat, dann ist ein Element von M maximal.*

Seinen Namen hat Zorns Lemma von Max Zorn, es wurde jedoch erstmals von Kazimierz Kuratowski bewiesen. Intuitiv lässt sich Zorns Lemma so erklären: Mittels Auswahlaxiom (zu dem Zorns Lemma äquivalent ist) schaffen wir eine transfinite Folge $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ Irgendwann gehen uns die strikt größeren Elemente aus und wir sind bei einem maximalen Element angelangt. Mit etwas Wissen über Ordinalzahlen lässt sich das auch wirklich genau so beweisen. Ohne Ordnialzahlen werden die Beweise deutlich komplizierter.

Literaturverzeichnis

[1] R. Bartsch. *Allgemeine Topologie I*. 2007.

[2] H.-C. Reichel C. Cigler. *Topologie, Eine Grundvorlesung*. 1987.

[3] Cerebus. *Ultrafilter in Topologie und Logik*. 2006.

[4] Klaus Jaenich. *Topologie*. 2005.

[5] Tobias Oertel-Jäger. *Funktionalanalysis*. 2012.

[6] W. Rinow. *Topologie*. 1975.