Vollständigkeit

Andreas Schmitt

Ausarbeitung zum Proseminar zur Topologie im WS 2012/13

1 Einleitung

Bei der Konvergenz von Folgen im Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ trifft man schnell auf den Begriff der Cauchy-Folge. Diese erlaubt die Konvergenz einer Folge in $\mathbb{R}$ festzustellen ohne der Grenzwert zu kennen. Dies basiert auf einer zentralen Eigenschaft der reellen Zahlen: Sie bilden einen vollständigen metrischen Raum.
Diese Ausarbeitung hat das Ziel, diese Vollständigkeit für metrische Räume zu charakterisieren. Dazu werden zunächst Cauchy-Folgen und Cauchy-Filter definiert und deren Eigenschaften studiert. Im Anschluss wird Vollständigkeit definiert und es werden einige grundlegende Sätze bewiesen. Abschluss der Ausarbeitung bilden Anwendungen wie Fortsetzungssätze, der Banach'sche Fixpunktsatz und der Bairesche Kategoriensatz.
Die Ausarbeitung beruht auf den Büchern von Dugundji (1966), Herrlich (1986) und Preuß (1972).

2 Die Cauchy-Eigenschaft

2.1 Cauchy-Folgen

Definition 1. Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy-Folge* falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \; \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Man beachte, dass die Cauchy-Eigenschaft von der Metrik d abhängt. Eine Folge kann für eine Metrik Cauchy sein, muss es aber nicht für eine andere sein.

Einen Verbindung zwischen konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen liefert der nächste Satz.

Satz 2. *In einem metrischem Raum (X, d) ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x. Nach Definition existiert dann für jedes $\varepsilon > 0$ ein N mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n, m > N$. Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge. $\square$

Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. In Raum $]0, 1]$ versehen mit der Euklidischen Norm konvergiert die Cauchy-Folge $x_n = \frac{1}{n}$ nicht.

Satz 3. *Eine Cauchy-Folge, welche eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert gegen den Grenzwert dieser Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge mit konvergenter Teilfolge $(x_{n_k}) \to x$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $N > 0$, sodass $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n > N$ gilt. Und da die Teilfolge konvergiert, existiert ein Index $n_0 > N$ mit $d(x, x_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall\ n \leq N$$

□

Es folgt, dass eine Cauchy-Folge entweder konvergiert oder keine Häufungspunkte besitzt.

Die folgende Definition der Begriffe *Durchmesser*, sowie *benachbart* wird benötigt um eine Äquivalenzaussage über Cauchy-Folgen zu liefern.

Definition 4.

- Der *Durchmesser* einer Teilmenge A eines metrischen Raumes X ist definiert als

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(a, b) : a \in A, b \in A\}.$$

- Zwei Folgen (x_n) und (y_n) heißen *benachbart*, wenn die Folge $(d(x_n, y_n))$ gegen 0 konvergiert.

Satz 5. *Es ist äquivalent:*

1. (x_n) *ist eine Cauchy-Folge.*
2. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{x_m : m \geq n\}) = 0.$
3. *Je zwei Teilfolgen von* (x_n) *sind benachbart.*

Beweis.

$1 \Rightarrow 2$ klar.

$2 \Rightarrow 3$ Seien $(y_i) := (x_{n_i})$ und $(z_i) := (x_{m_i})$ Teilfolgen von (x_n). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N, sodass aus $m_1 \geq N$ und $m_2 \geq N$ stets $d(x_{m_1}, x_{m_2}) < \varepsilon$ folgt. Setze $I := \min\{i : n_i \geq N, m_i \geq N\}$.
Dann ist für $i \geq I$ stets $d(y_i, z_i) = d(x_{n_i}, x_{m_i}) < \varepsilon$

$3 \Rightarrow 1$ Wäre (x_n) keine Cauchy-Folge, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Zahlen $m_1(n)$ und $m_2(n)$ mit $d(x_{m_1(n)}, x_{m_2(n)}) \geq \varepsilon$.
Per Induktion kann man dann zwei nicht benachbarte Teilfolgen $(y_i) := (x_{n_i})$ und $(z_i) := (x_{m_i})$ konstruieren.
Induktionsanfang: Setze $n_1 := m_1(1)$ und $m_1 := m_2(1)$.
Induktionsschluss: Seien $n_1, n_2, \ldots, n_r$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r$ schon definiert. Sei $s := 1 + \max\{n_r, m_r\}$. Wähle $n_{r+1} = m_1(s)$ und $m_{r+1} = m_2(s)$. Die Folgen (x_{n_i}) und (x_{m_i}) sind nicht benachbart. Für alle i gilt $d(x_{n_i}, x_{m_i}) \geq \varepsilon$.

□

Satz 6. *Es seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ zwei metrische Räume. Ist $f : X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion und ist (x_n) eine Cauchy-Folge in X. So ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in Y.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist existiert ein δ, sodass für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt, dass $d_X(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
Es existiert ein $N > 0$, sodass $d_X(x_n, x_m) < \delta$ für $n, m > N$, weil (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Damit ist $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$. □

Das die Menge der Folgenglieder einer Cauchy-Folge beschränkt ist, zeigt der folgende Satz.

Satz 7. *Ist (x_n) eine Cauchy-Folge, so ist $\{(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.*

Beweis. Nach Satz 5 existiert ein N, sodass $\operatorname{diam}\{x_m : m \geq N\} < 1$ ist.
Setze $r := \max\{d(x_i, x_N) : i = 1, \ldots, N\}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{diam}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{d(x_i, x_n) : i = 1 \ldots N\} + \sup\{d(x_n, x_m) : n, m \geq N\} \\
&\leq 2(r + 1).
\end{aligned}
$$

□

2.2 Cauchy-Filter

Im folgenden werden Cauchy-Folge mit Hilfe von Filter verallgemeinert.

Definition 8. Ein Filter $\mathscr{F}$ auf einem metrischen Raum (X, d) heißt Cauchy-Filter, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $F \in \mathscr{F}$ existiert mit $\operatorname{diam}(F) < \varepsilon$.

Es gelten die folgenden Beziehungen zwischen Cauchy-Folgen und Cauchy-Filter.

Satz 9.

1. *Ein konvergenter Filter ist ein Cauchy-Filter.*

2. *Der von einer Cauchy-Folge (x_n) erzeugte Filter $\mathscr{F} = \{F_k : k \in \mathbb{N}\}$, mit $F_k := \{x_i : i \geq k\}$ ist eine Cauchy-Filter.*

Beweis.

1. Sei $\mathscr{F}$ ein gegen x konvergenten Filter. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathscr{F}$ konvergiert ist der Umgebungsfilter des Grenzwertes x Teilmenge von $\mathscr{F}$. Wähle eine gegeignete offene Umgebung U von x. Dann gilt
$$\operatorname{diam}(F) \leq \operatorname{diam}(U) = \varepsilon$$

2. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $N > 0$, sodass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$. Mit dieser Wahl ist $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$.

□

3 Vollständigkeit

3.1 Vollständigkeit über Cauchy-Folgen

Es wurden nun alle Grundvoraussetzungen geschaffen um die Vollständigkeit zu definieren.

Definition 10. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Für vollständige Räume lässt sich leicht nachprüfen ob ein Folge konvergiert, indem man prüft ob sie eine Cauchy-Folge ist, ohne dabei den Grenzwert betrachten zu müssen.

Beispiel 11.

1. Der Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bezüglich der Euklidischen Norm ist nicht vollständig, wie man an der Cauchy-Folge $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ sieht, welche bekanntlich gegen $e \notin \mathbb{Q}$ konvergiert.

2. Für jede Menge X ist $B(X)$der Raum der beschränkten Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ bzgl. der Supremumsnorm vollständig.

   Sei (f_n) eine Cauchy-Folge, dann ist $(f(x)_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und konvergiert somit gegen einen Wert $f(x) \in \mathbb{R}$.
   Für $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $d(f_m, f_{m'}) < \varepsilon$ für alle $m, m' > N$. Wodurch gilt $|f(x)_m - f(x)_{m'}| < \varepsilon$ für alle $m, m' > N$ und $x \in X$.
   Also gilt $|f(x) - f_N(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$ und es folgt, dass die durch $x \to f(x)$ definierte Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt ist und somit in $B(X)$ liegt.
   Für m' gegen Unendlich in der oberen Abschätzung folgt die Ungleichung $|f(x)_m - f(x)| < \varepsilon$ für alle $m > N$ und $x \in X$. Damit ist $d(f_m, f) < \varepsilon$ für $m > N$ gezeigt.

Aussagen darüber wann Teilräume bzw. Räume vollständig sind, beantworten die nachfolgenden Sätze.

Satz 12. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist X vollständig.*

Beweis. Ist X kompakt, so ist X auch Folgen-kompakt, d.h. für jede Folge existiert eine Teilfolge welche konvergiert.
Nach Satz 3 konvergiert dann jede Cauchy-Folge. □

Satz 13. *Es gelten die beiden Aussagen:*

1. *Jede vollständige Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist abgeschlossen.*

2. *Ist A ein abgeschlossener Unterraum eines vollständigen metrischen Raumes (X, d), so ist A vollständig.*

Beweis.

1. Sei a ein Häufungspunkt von A. Dann existiert eine Folge (a_n) in A die gegen a konvergiert.
   Da (a_n) konvergent ist, ist sie eine Cauchy-Folge. Da A vollständig ist konvergiert (a_n) gegen einen Punkt $x \in A$. Da der Limes eindeutig ist muss gelten, dass $a = x$, somit ist $a \in A$.
   Also liegt jeder Häufungspunkt von A in A. Damit ist A ist abgeschlossen.

2. Sei (a_n) eine Cauchy-Folge in A. Dann gilt $(a_n) \subset X$. Die Folge konvergiert also gegen ein $x \in X$.
   Da A abgeschlossen ist liegt jeder Grenzwert einer Folge aus A in A. Somit gilt $x \in A$.

□

Der nächste Satz wird zum Beweis des Baireschen Kategoriensatz benötigt.

Satz 14. *Für einen metrischen Raum ist äquivalent:*

1. *X ist vollständig.*
2. *Für jede monoton fallende Folge* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ *nicht-leerer Teilmengen von X mit* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$ *gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \emptyset.$$

Beweis.

1. ⇒ 2. Wähle in jeden A_n einen Punkt a_n. Die Folge (a_n) ist eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen $x \in X$.
   Für jedes n ist $(a_n, a_{n+1}, \dots)$ eine gegen x konvergierende Folge, die ganz in A_n liegt.
   Somit ist x Häufungspunkt von jedem A_n und deshalb $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$.

2. ⇒ 1. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge. Die Folge $(A_n) = (\{x_m : m \geq n\})$ ist eine monoton fallende Folge nicht-leerer Mengen mit $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.
   Also existiert ein $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Der Punkt x ist ein Häufungspunkt der A_n und damit ein Häufungspunkt von (x_n).
   Nach Satz 3 konvergiert die Folge.

□

3.2 Vollständigkeit bzgl. Filter

Die gegebene Definition der Vollständigkeit passt mit der Definition von Cauchy-Filtern zusammen, wie die folgenden Sätze zeigen.

Satz 15. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Konvergiert jeder Cauchy-Filter, so ist X vollständig.*

Beweis. Eine Folge konvergiert, wenn der von ihr erzeugte Filter konvergiert. Wie wissen aus Satz 9, dass jede Cauchy-Folge einen Cauchy-Filter erzeugt. Daraus folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz zeigt die entgegengesetzte Richtung.

Satz 16. *Sei (X,d) ein vollständig metrischer Raum. Dann konvergiert jeder Cauchy-Filter.*

Beweis. Sei $\mathscr{F}$ ein Cauchy-Filter. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $F_n \in \mathscr{F}$ mit $\operatorname{diam}(F_n) < \frac{1}{n+1}$. Wähle aus jedem F_n ein x_n.
Behauptung: (x_n) ist eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$. Setze $N = 2 * \varepsilon + 1$. Dann gilt für die natürlichen Zahlen $n, k > N$, dass ein $c \in F_n \cap F_k$ existiert mit $d(x_n, c) < \frac{1}{n+1}$ und $d(c, x_k) < \frac{1}{k+1}$, da $\mathscr{F}$ durchschnittsstabil ist und $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Daraus folgt für alle $n, k > N$

$$d(x_n, x_k) \leq d(x_n, c) + d(c, x_k) < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{k+1} \leq 2 * \frac{1}{(2 * \varepsilon + 1) + 1} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also ist (x_n) eine Cauchy-Folge die nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert.
Zu zeigen ist noch das jede Umgebung von x, bezeichnet mit $U_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$, Element von $\mathscr{F}$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$.
Da (x_n) konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{2*(\frac{1}{\varepsilon}+1)}$ für alle $n > N$. Setze nun $i := \max\{N, 2 * \frac{1}{\varepsilon} + 1\}$.
Mit dieser Wahl ist F_i Teilmenge von $\mathscr{U}_\varepsilon(x)$. Sei $y \in F_i$, dann folgt

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, y) < \frac{1}{2 * \frac{1}{\varepsilon} + 1} + \frac{1}{2 * \frac{1}{\varepsilon} + 1} = \varepsilon.$$

Da $\mathscr{F}$ abgeschlossen bzgl. Obermengen ist, liegt $U_\varepsilon(x)$ in $\mathscr{F}$. Also konvergiert $\mathscr{F}$. □

Aus diesen beiden Sätzen folgt, dass die Definition der Vollständigkeit eines metrischen Raumes über Cauchy-Folgen äquivalent ist, zu der Aussage:

Jeder Cauchy-Filter in X konvergiert.

3.3 Fortsetzung gleichmäßig stetiger Abbildungen in vollständige Räume

Dieses Teilkapitel beschäftigt sich mit der Frage, wann eine gleichmäßig stetige Funktion $f : A \to Y$ von einer gleichmäßig stetigen Funktion $g : X \to Y$ mit $A \subset X$ fortgesetzt werden kann, d.h. für $x \in A$ gilt $f(x) = g(x)$.

Definition 17. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *dicht*, falls der Abschluss von A gleich X ist.

Satz 18. *Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \to Y$ von einem dichten Unterraum A eines Raumes X in einen Raum Y lässt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g : X \to Y$ fortsetzen.*

Beweis. Da A dicht in X liegt, kann man für jedes $x \in X$ eine gegen x konvergente Folge (x_n) in A finden. Wegen der Konvergenz ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Nach Satz 6 ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge, welche wegen der Vollständigkeit von Y gegen einen Wert, bezeichnet mit $g(x)$, in Y konvergiert.
Die so definierte Abbildung $g : X \to Y$ ist wegen der Stetigkeit von f eine Fortsetzung von f

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(x)\ \forall x \in A.$$

Die Funktion g ist eindeutig. Sei $h : X \to Y$ eine weitere gleichmäßig stetige Fortsetzung von f. So gilt

$$h(x) = h(\lim_{n\to\infty}(x_n)) = f(\lim_{n\to\infty}(x_n)) = g(x). \quad \forall x \in X$$

Wobei (x_n) die am Anfang gewählte Folge ist.
Weiter ist zu zeigen, dass g gleichmäßig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass aus $a \in A$ und $b \in A$ und $d(a,b) < \delta$ stets $d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt, weil f gleichmäßig stetig ist.
Sei nun $x, y \in X$ und $d(x,y) < \delta$. Weil $(d(x_n, y_n))$ gegen $d(x,y)$ konvergiert, existiert ein N, sodass aus $m > N$ stets $d(x_m, y_m) < \delta$ und somit $d(f(x_m), f(y_m)) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt.
Daraus folgt $d(g(x), g(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

Eine Anwendung dieses Satzes ist z.B. die Definition von $a^x, x \in \mathbb{R}$ mit dem Wissen über $a^r, r \in \mathbb{Q}$

Satz 19. *Ist A ein Teilraum von X, so lässt sich jede gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \to [0,1]$ zu einer gleichmäßig stetige Abbildung $g : X \to [0,1]$ fortsetzen.*

Der Beweis benötigt das folgende Resultat, welches nicht bewiesen wird, jedoch bei Herrlich (1986) nachzulesen ist.

Satz 20. *Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von X, so lässt sich jede (gleichmäßig) stetige Funktion $f : A \to [0,1]$ zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $g : X \to [0,1] fortsetzen.$*

Beweis von Satz 19. Der Abschluss $B := \bar{A}$ von A ist abgeschlossen in X. Da A dicht in B liegt, lässt sich f zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $h : B \to [0,1]$ fortsetzen.
Da B abgeschlossen in X ist, lässt sich h nach Satz 20 zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g : x \to [0,1]$ fortsetzen. □

4 Der Banach'sche Fixpunktsatz

In diesem Abschnitt wird der Banach'sche Fixpunktsatz bewiesen, für welchen die Vollständigkeit eine Voraussetzung ist.

Zunächst werden einige Definitionen gegeben, welche im Zusammenhang mit dem Fixpunktsatz von Bedeutung sind.

Definition 21. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *Lipschitz-stetig* falls ein L existiert, sodass:

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq L * d_X(x,y).$$

Bemerkung 22. Jede Lipschitz-stetige Abbildung ist auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest. Setze $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Dann gilt für alle x, y mit $d(x,y) < \delta$

$$d(f(x), f(y)) \leq L * d(x,y) < L * \delta = \frac{L * \varepsilon}{L} = \varepsilon$$

□

Basis für den Banach'schen Fixpunktsatz bildet die Kontraktionseigenschaft eine Abbildung.

Definition 23. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $F : X \to X$ heißt *Kontraktion*, falls ein $c < 1$ existiert, sodass

$$d(F(x), F(y) \leq c * d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Jede Kontraktion ist Lipschitz-stetig, also auch stetig.

Definition 24. Sei $F : X \to X$ eine Abbildung vom Raum X nach X. Ein Punkt $x \in X$ wird *Fixpunkt für* F genannt, falls gilt:

$$F(x) = x.$$

Nicht jede Funktion hat Fixpunkte z.B. $f(x) = x + 1$. Funktionen können auch mehrere Fixpunkte haben, wie etwa $f(x) = x$.

Der Banach'sche Fixpunktsatz beschäftigt sich mit der Existenz und Eindeutigkeit von Fixpunkten und der Beweis gibt sogar ein konstruktives Verfahren diese zu berechnen an.

Satz 25. *(Banach'scher Fixpunktsatz) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und F eine Kontraktion von X in X, dann existiert genau ein Fixpunkt $x \in X$ mit $F(x) = x$.*

Beweis. Zunächst wird die Eindeutigkeit des Fixpunkts gezeigt. Seien x, y Punkte in X mit $F(x) = x$ und $F(y) = y$. Angenommen x und y sind verschieden.
Da F eine Kontraktion ist folgt

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq c * d(x, y) < d(x, y).$$

Diese Ungleichung ist nur für $x = y$ erfüllt. Widerspruch!

Sei nun $x_0 \in X$ beliebig. Definiere die Folge (x_n) rekursiv durch

$$x_{n+1} = F(x_n) \; n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $c < 1$ die Kontraktionskonstante. Dann gilt für $n \geq 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq c * d(x_n, x_{n-1}).$$

Durch Induktion erhält man

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n * d(x_1, x_0) \; n \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $c < 1$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{c^N}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Für $N \leq n < m$ folgt mit der Dreiecks-Ungleichung und der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\ &\leq d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} c^i * d(x_1, x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1-n} c^{i+n} * d(x_1, x_0) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1-n} c^i * d(x_1, x_0) * c^n \\ &= \frac{1 - c^{m-n}}{1 - c} d(x_1, x_0) c^n \\ &\leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_1, x_0) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist (x_n) eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit gegen ein $x \in X$ konvergiert.
Da F eine Kontraktion, damit Lipschitz-stetig und deswegen stetig auf X ist, gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= F(\lim_{n \to \infty} (x_n)) \\ &= \lim_{n \to \infty} F(x_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x. \end{aligned}$$

Es wurde ein Fixpunkt gefunden. □

Um also einen Fixpunkt einer Funktion F zu finden, kann man sie, wenn möglich, auf einen Bereich M beschränken, auf welchen sie eine Kontraktion besitzt. Wiederholtes Anwenden der Funktion auf einen Startpunkt aus M liefert den Fixpunkt.

Beispiel 26. Gesucht ist eine Lösung von $x = \cos(x)$. Wenn man den Kosinus auf ganz $\mathbb{R}$ betrachtet ist er keine Kontraktion. Deshalb beschränke ihn auf $M = [0, 1]$. Dann ist er eine Kontraktion.

$$|\cos(x) - \cos(y)| = |\int_x^y - \sin(t)\ dt| \leq \int_x^y |-\sin(t)|\ dt \leq |x - y| \sup_{t \in M} |\sin(t)| = |x - y| \sin(1)$$

Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt, dass $x_{k+1} = \cos(x_k)$ für alle $x_0 \in M$ gegen den Fixpunkt konvergiert. Dieser ist ca. 0.73908.

Der Banach'sche Fixpunktsatz ist nicht nur in der Numerik ein wichtiger Satz. Resultate, die mit ihm bewiesen werden, sind z.B. der implizite-Funktionen Satz oder der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

5 Der Satz von Baire

In diesem Abschnitt wird der Satz von Baire bewiesen, welcher eine Aussage über vollständige, metrische Räume macht.

Definition 27. Eine Teilmenge A eines Metrischen Raums X heißt

1. *nirgends dicht* in X, wenn das Innere des Abschluss von A die leere Menge ist. D.h. der Abschluss von A enthält keine offene Kugel ungleich der leeren Menge.
2. *von 1. Kategorie* oder *mager* in X, wenn eine Folge (A_n) nirgends dichter Teilmengen von X mit
$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
existiert.
3. *von 2. Kategorie* oder *fett* in X, wenn A nicht mager in X ist.

Ein metrischer Raum X heißt *von 2. Kategorie*, wenn X fett in X ist.

Beispiel 28.

- In $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik ist jede endliche Menge nirgends dicht.
- Mit der Euklidischen Metrik ist $\mathbb{Q}$, als abzählbare Vereinigungen von Ein-Punkt-Mengen, die nirgends dicht sind, mager in $\mathbb{R}$.

Satz 29 (Bairesche Kategoriensatz)**.** *Für jede magere Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes X ist $X \setminus A$ dicht in X.*

Beweis. Da A mager ist, existieren A_n mit $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sei nun $x \in X$ beliebig gewählt und U eine Umgebung von x. Nun wird per Induktion eine Folge von nicht-leeren offenen Teilmengen von X definiert.
Induktionsanfang: Da A_1 nirgends dicht ist und somit der Abschluss von A keine offene Menge ungleich der leeren Menge enthält, ist U keine Teilmenge von $\overline{A_1}$. Somit existiert ein $x_1 \in U$ und eine offene Umgebung U_1 von x_1 mit $\operatorname{diam}(U_1) < 1$ und $\overline{U_1} \subset U \setminus \overline{A_1}$.
Induktionsschritt: Seien $U_1, \ldots, U_n$ definiert. Da A_{n+1} nirgends dicht in X ist, ist U_n keine Teilmenge von $\overline{A_{n+1}}$. Somit existiert ein $x_{n+1} \in U_n$ und eine offene Umgebung U_{n+1} von x_{n+1} mit $\operatorname{diam}(U_{n+1}) < \frac{1}{n+1}$ und $\overline{U_{n+1}} \subset U_n \setminus \overline{A_{n+1}}$.
Es wurde also induktiv eine monoton fallende Folge offener Menge definiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(U_n) = 0$.
Da X vollständig ist, gilt nach Satz 14 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Für $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ gilt zum einen $y \in U$, andererseits $y \notin A_n$ für alle n. Und damit auch $y \notin A$. Somit ist $y \in U \cap (X \setminus A)$.
U war als beliebige offene Umgebung von x gewählt, also ist x Berührpunkt von $X \setminus A$. Und da x beliebig war, ist jeder Punkt aus X im Abschluss von $X \setminus A$.
$\square$

Korollar 30. *Jeder nicht-leere, vollständige Raum X ist von 2. Kategorie.*

Beweis. Angenommen X wäre mager. Nach Satz 29 wäre dann $X \setminus X = \emptyset$ dicht in X. Die leere Menge ist jedoch niemals dicht in einer Menge. Widerspruch. □

Der Bairesche Kategoriensatz existiert in verschiedenen Formen. Eine weitere ist die Folgende, welche nur als Folgerung der bisher bewiesenen Ergebnisse gezeigt wird.

Satz 31. *Ist X ein vollständiger, metrischer Raum. Dann ist jede nicht-leere offene Teilmenge von X von 2. Kategorie.*

Beweis. Sei O eine offene Teilmenge von X. Wegen Satz 13 ist auch $\overline{O}$ ein vollständig metrischer Raum und nach Korollar 30 von zweiter Kategorie in sich.
Angenommen O wäre mager d.h. es existieren nirgends dichte Mengen mit

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ mit } \overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset.$$

Da der Abschluss von A_n in (X, d) und $(\overline{O}, d_{|\overline{O}\times\overline{O}})$ übereinstimmt. ist auch $\overset{\circ}{\overline{A_n}}$ in $(\overline{O}, d_{|\overline{O}\times\overline{O}})$ leer.
Auch ∂O ist eine abgeschlossene Teilmenge von $(\overline{O}, d_{|\overline{O}\times\overline{O}})$. Damit ist ∂O eine nirgends dichte Menge, da $\overset{\circ}{\overline{\partial O}} = \overset{\circ}{\partial O} = \emptyset$.
Dann folgt aus $\overline{O} = \partial O \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, dass $\overline{O}$ mager ist, im Widerspruch dazu, dass es von 2. Kategorie ist. □

Es gilt die folgende Äquivalenz.

Satz 32. *Für einen metrischen Raum X ist äquivalent:*

1. *Jede nicht-leere offene Teilmenge von X ist von 2. Kategorie.*
2. *Für alle offenen und dichten Teilmengen von X ist der höchstens abzählbare Schnitt dicht in X.*

Beweis.

2. ⇒ 1. Angenommen ein offene Teilmenge O wäre nicht von 2. Kategorie. Dann gäbe es eine Folge nirgends dichter Teilmengen mit $\overset{\circ}{\overline{A_n}} = \emptyset$ und $O = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.
Betrachte nun die Komplemente. Dann ist $U_n := X \overset{\circ}{\setminus} A_n$ dicht in X und es gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \overset{\circ}{\setminus} A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus \overline{A_n} = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \subset X \setminus O.$$

Die Menge $X \setminus O$ ist abgeschlossen, und damit ist $\overline{X \setminus O} = X \setminus O \neq X$, also nicht dicht. D. h es existiert eine Folge von offenen und dichten Teilmengen deren Schnitt nicht dicht ist.

1. ⇒ 2. Angenommen es existieren offene und dichte Teilmengen U_n von X, sodass der abzählbare Schnitt nicht dicht in X liegt.

Es gilt dann, dass die Mengen $X \setminus \mathring{U}_n$ nirgends dicht sind und $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} \neq X$.

Damit ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus \mathring{U}_n = X \setminus \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n} \neq X \setminus X = \emptyset.$$

Es existiert also eine Menge in X, welche Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist. Weiter ist diese Menge offen, da sie abzählbare Vereinigung offener Mengen ist. Also ist eine offene Teilmenge von X von 1. Kategorie.

□

Bemerkung 33. Jeder Raum der eine Aussage von Satz 32 erfüllt heißt *Baire-Raum*.

Mit Hilfe des Bairesche Kategoriensatz lassen sich viele Resultate in der Funktionalanalysis zeigen. Ein triviales ist das Folgende.

Bemerkung 34. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist von 2. Kategorie.

Beweis. Wäre $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mager, dann wäre auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}$ mager. Nach dem Baireschen Kategoriensatz ist aber $\mathbb{R}$ von 2. Kategorie. □

6 Zusammenfassung

In dieser Ausarbeitung wurde die Vollständigkeit metrischer Räume über Cauchy-Folgen definiert. Diese wurden erklärt und ihre Eigenschaften aufgezeigt.
Eine äquivalente Definition erfolgt wie gezeigt über Cauchy-Filter.
Es wurden Sätze gezeigt, welche auf Vollständigkeit aufbauen, darunter den Banach'sche Fixpunktsatz, der Bairesche Kategoriensatz sowie Fortsetzungssätze für gleichmäßig stetige Funktionen.

Literatur

James Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

Horst Herrlich. *Einführung in die Topologie.* Heldermann Verlag, Berlin, 1986.

Gerhard Preuß. *Allgemeine Topologie.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.