Proseminar Mengentheoretische Topologie: Vervollständigung Metrischer Räume

Markus Pfeifer

7.2.2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wie wir bereits wissen, haben vollständige metrische Räume gegenüber nicht vollständigen metrischen Räumen einige Vorteile und nützliche Eigenschaften. Dies wirft natürlich die Frage auf, ob wir unvollständige metrische Räume irgendwie in vollständige "verwandeln" können.
In diesem Vortrag soll darauf eine Antwort gegeben werden. Die Ideen hierzu gehen zurück auf *Georg Cantor* und *Felix Hausdorff*, die sich schon vor 100 Jahren mit derartigen Fragen beschäftigten.
Zum Beginn wollen wir jedoch zunächst die hierfür wichtigen Konzepte wiederholen.

Wiederholung

Definition 1 (Metrischer Raum)**.** Sei M eine Menge. Eine Funktion $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $d(x,y) > 0 \quad \Leftrightarrow x \neq y, \quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow x = y$ *(Positiv-Definitheit)*
2. $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie)*
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Dreiecksungleichung)*

In diesem Fall heißt (M,d) *Metrischer Raum.*

Definition 2 (Cauchy-Folge)**.** Sei (M,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset M$ heißt *Cauchy-Folge*, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_0(\epsilon)$ gilt:

$$d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Definition 3 (Vollständiger Metrischer Raum)**.** Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

Bemerkung. Ist M eine beliebige Menge, dann ist $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

die sogenannte *Diskrete Metrik* oder *Krümelmetrik*. Bemerkenswert, weil der naiven Anschauung widersprechend, ist, dass (M,d) vollständig ist.

Neben diesen Konzepten werden für die weitere Betrachtung noch der Begriff der gleichmäßig stetigen Abbildung und der Isometrie benötigt.

Definition 4 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, sodass aus $d(x,y) < \delta(\epsilon)$ folgt: $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$. Dieses δ darf hierbei nicht von x oder y abhängen!

Definition 5 (Isometrie)**.** Unter den Voraussetzungen von oben heißt f *Isometrie*, falls für alle $x, y \in X$ gilt: $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$.

Bemerkung. Es folgt sofort, dass Isometrien gleichmäßig stetig sind. Man sieht auch leicht, dass sie injektiv sind, denn gäbe es $x \neq y$ mit $f(x) = f(y)$, so wäre $0 = d'(f(x), f(y)) \neq d(x,y)$ im Widerspruch zur Definition der Isometrie.

Damit haben wir die Grundbegriffe beisammen und können uns Neuem widmen.

Vervollständigung

Unser Ziel ist es nun, beliebige metrische Räume in vollständige metrische Räume "einzubetten". Anschaulich gesprochen geht es darum, einem gegebenen metrischen Raum systematisch neue Elemente hinzuzufügen, bis jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat. Dabei soll der entstehende Raum der "kleinste" sein, der diese Eigenschaft hat.
Diese Anschauung ist nicht ganz richtig, denn bei genauer Betrachtung ist diese nur möglich, wenn man den metrischen Raum bereits als Teilmenge eines anderen Raumes kennt. Hat man es einfach mit einer beliebigen offenen Menge zu tun, die für sich allein im mathematischen Raum schwebt, so gäbe es keine sinnvolle Obermenge, in die man diese einbetten könnte.
Daher weicht man darauf aus, einen solchen metrischen Raum einfach isometrisch auf einen anderen Raum abzubilden, vom den man bereits weiß, dass er einen (vollständigen) Oberraum hat. Konkret heißt das folgendes:

Definition 6 (Vervollständigung)**.** Seien (X, d) ein metrischer und (Y, d') ein vollständiger metrischer Raum. (Y, d') heißt *Vervollständigung* von X, wenn eine Isometrie $f : X \longrightarrow Y$ existiert, sodass $f(X)$ *dicht* in Y liegt - das heißt: $\overline{f(X)} = Y$, wobei $\overline{f(X)}$ den topologischen Abschluss von $f(X)$ bezeichnet.

Die Forderung, dass das Bild von X *dicht* in Y liegen muss, wird uns später die Eindeutigkeit der Vervollständigung garantieren.
Als nächstes wollen wir uns jedoch mit der viel wichtigeren Frage befassen, ob eine Vervollständigung überhaupt immer existiert. Um zu beweisen, dass dem tatsächlich so ist, werden wir einfach eine Vervollständigung konstruieren, und zwar zunächst auf einem Weg, den *Felix Hausdorff* aufgezeigt hat.

Satz 1 (Vervollständigungssatz von Hausdorff)**.** *Jeder metrische Raum (X, d) besitzt eine Vervollständigung (Y, d').*

Beweis nach Hausdorff. Es sei $(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ der Raum der stetigen beschränkten Funktionen $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsmetrik $d_\infty : d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d(f(x), f(y))$. Wir zeigen zunächst, dass dieser vollständig ist.
Hierzu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_b(X, \mathbb{R})$ eine Cauchy-Folge, das heißt, es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 mit $d_\infty(f_m, f_{m'}) < \epsilon$ für alle $m, m' > n_0$. Damit folgt für alle $x \in X$ auch $\mid f_m(x) - f_{m'}(x) \mid < \epsilon$. $(f_m(x))$ ist somit aber für jedes $x \in X$ eine reelle Cauchy-Folge und konvergiert somit ($\mathbb{R}$ ist vollständig!) gegen einen festen Wert $y_x \in \mathbb{R}$. Es folgt:

1. $\mid f(x) - f_{n_0}(x) \mid < \epsilon$ für alle $x \in X$, also ist $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto y_x$ beschränkt.
2. $d(f, f_m)_\infty < \epsilon$ für alle $m \geq n_0$. Also konvergiert f_m bezüglich d_∞, daher ist f stetig, sodass $f \in C_b(X, \mathbb{R})$. und $(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ ist vollständig.

Nun müssen wir eine Isometrie von X nach $(C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty)$ finden.
Hierzu wählen wir uns ein festes $x_0 \in X$ und definieren folgende Funktion:

$$\begin{aligned} i: &\quad X \longrightarrow (C_b(X, \mathbb{R}), d_\infty), \\ i: &\quad x \longmapsto (y \mapsto d(x, y) - d(x_0, y)) \end{aligned}$$

Jedes x wird also auf eine Funktion $f_x(y)$ abgebildet, die durch die Differenz der Abstände zwischen x und y und x_0 und y gegeben ist. Die Funktion ist wohldefiniert, da f_x offenbar für jedes x stetig und beschränkt (wegen $\mid d(x, y) - d(x_0, y) \mid \leq d(x, x_0)$) ist. Ferner ist i eine Isometrie:
Für alle x, x' gilt

$$\begin{aligned} d_\infty(i(x), i(x')) &= \sup_{y\in X} \mid f_x(y) - f_{x'}(y) \mid \\ &= \sup_{y\in X} \mid d(x, y) - d(x_0, y) - d(x', y) + d(x_0, y) \mid \\ &= \sup_{y\in X} \mid d(x, y) - d(x', y) \mid \\ &= d(x, x'), \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit aus $\mid d(x,y) - d(x',y) \mid \leq d(x,x')$ und $\mid d(x,x) - d(x',x) \mid = d(x',x)$ erhält. Zuletzt setzen wir $Y = \overline{i(X)}$ und

$$\begin{aligned} d': &\quad Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \\ d': &\quad (f,g) \longmapsto d_\infty(f,g) \end{aligned}$$

und erhalten somit eine Vervollständigung (Y, d') von (X, d). □

Damit haben wir gezeigt, dass es eine Vervollständigung gibt. Bleibt noch zu zeigen, dass diese eindeutig ist. Doch um zu sehen, dass dies auch wirklich notwendig ist, wollen wir zunächst eine alternative Konstruktion der Vervollständigung vornehmen. Diese auf Cantor zurückgehende Konstruktion unterscheidet sich auf den ersten Blick stark von derjenigen von Hausdorff.
Ursprünglich entwickelte Cantor seine Idee nur am Beispiel der Reellen Zahlen, das Konzept lässt sich aber eins zu eins auf allgemeine metrische Räume übertragen.

Beweis nach Cantor. Zum metrischen Raum (X, d) sei X_C die Menge aller Cauchy-Folgen in X. Auf dieser Menge definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} d^*: &\quad X_C \times X_C \longrightarrow \mathbb{R}, \\ d^*: &\quad ((x_n),(y_n)) \longmapsto \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n). \end{aligned}$$

Der Limes existiert, da $d(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge ist:

$$\begin{aligned} \mid d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m) \mid &\leq \mid d(x_n,y_n) - d(x_n,y_m) \mid + \mid d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m) \mid \\ &\leq \underbrace{\mid d(y_n,y_m) \mid}_{\text{Cauchy-Folge in X}} + \underbrace{\mid d(x_n,x_m) \mid}_{\text{Cauchy-Folge in X}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Allerdings stellt diese Abbildung *keine* Metrik auf X_C dar, denn es kann sein, dass zwei unterschiedliche Cauchy-Folgen den Abstand 0 voneinander haben. Betrachte zum Beispiel, falls X wenigstens zwei Elemente $x, y \in X$ hat:

$$\begin{aligned} x_n &:= x \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ y_n &:= \begin{cases} y, & n < n_0 \\ x, & n \geq n_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Folgen sind echt verschieden, aber es gilt: $d^*((x_n),(y_n)) = 0$. Dieses Problem kann man allerdings umgehen. Hierzu definieren wir auf X_C folgende Relation:

$$(x_n) \sim (y_n) \quad :\Leftrightarrow \quad d^*((x_n),(y_n)) = 0.$$

Offenbar ist diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv - und somit eine Äquivalenzrelation. Diese unterteilt X_C in Äquivalenzklassen. Wir wollen im Folgenden zu einer festen Folge $(x_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ alle (x_n) mit $(x_n) \sim x_{0,n}$ als einzelnes Objekt $[(x_{0,n})]$, nämlich die (Äquivalenz-)Klasse betrachten. Die Menge aller (Äquivalenz-)Klassen von Cauchy-Folgen wollen wir X_V nennen. Auf dieser Menge definieren wir

$$\begin{aligned} d': &\quad X_V \times X_V \longrightarrow \mathbb{R}, \\ d': &\quad ([(x_n)],[(y_n)]) \longmapsto d^*((x_n),(y_n)) \end{aligned}$$

Wir überlegen uns kurz, dass dies wohldefiniert ist, also, dass jeder Äquivalenzklasse $[(x_{0,n})]$ *genau ein* Wert durch $d'(\cdot,[(y_{0,n})])$ zugewiesen wird. Seien $(x_{1,n}),(x_{2,n}) \in [(x_{0,n})]$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} &d^*((x_{1,n}),(y_{0,n})) \leq d^*((x_{1,n}),(x_{2,n})) + d^*((x_{2,n}),(y_{0,n})) = d^*((x_{2,n}),(y_{0,n})) \text{ und} \\ &d^*((x_{2,n}),(y_{0,n})) \leq d^*((x_{2,n}),(x_{1,n})) + d^*((x_{1,n}),(y_{0,n})) = d^*((x_{1,n}),(y_{0,n})) \\ \Leftrightarrow\ &d^*((x_{1,n}),(y_{0,n})) = d^*((x_{2,n}),(y_{0,n})) \end{aligned}$$

Die Funktion ist offenbar wohldefiniert und stellt eine Metrik auf X_V dar. Im Folgenden wollen wir zeigen, dass X_V *im Wesentlichen* eine Vervollständigung von X ist.
Der Beweis läuft nun in drei Schritten: 1. wir konstruieren eine isometrische Abbildung von X nach X_V, 2. zeigen wir, dass Cauchy-Folgen im Bild von X unter dieser Isometrie konvergieren und 3. zeigen wir, dass X_V vollständig ist.

1. Schritt. Wir definieren

$$\begin{aligned} i: &\quad X \longrightarrow X_V, \\ i: &\quad x \longmapsto [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \text{ mit } x_n = x \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine Isometrie:

$$d'(i(x), i(y)) = d^*((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

2. Schritt. Wir wollen zeigen, dass das Bild einer Folge $(x_j) \subset X$ unter i eine konvergente Folge darstellt. Es ist intuitiv klar, wogegen $(i(x_j))$ wohl konvergieren wird, nämlich gegen $\alpha := [(x_j)] \in X_V$. Die Folge der Bilder hat gerade die Form $(y_n) = ([(x_n)_j])_n$ - also für jedes n gerade die Äquivalenzklasse der konstanten Folge $(x_n)_j$ mit Wert x_n. Damit sehen wir ein:

$$d'(\alpha, (y_j)) = d^*((x_n), (x_j)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_j) < \epsilon,$$

da ja für alle $n, j > n_0$ für ein bestimmtes n_0 gilt: $d(y_n, y_j) < \epsilon$.

3. Schritt. Um schließlich zu zeigen, dass X_V vollständig ist, nutzen wir, dass es zu jeder Cauchy-Folge in X_V eine Cauchy-Folge in $i(X)$ gibt, die der Cauchy-Folge in X_V hinreichend nahe kommt, um ihren Grenzwert zu berechnen.
Es sei $(\alpha_n) \subset X_V$ eine Cauchy-Folge in X_V. Wir können diese dann ausdrücken als $([(a_j)]_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei nun $q_n := ([(a_n)]_j)_{j=j(n)}$, wobei $j(n)$ das kleinste j sei, sodass

$$d'((\alpha_n), (q_n)) < \frac{1}{n}.$$

Dann folgt:

$$d'((q_n), (q_m)) \le d'((q_n), (\alpha_n)) + d'((\alpha_n), (\alpha_m)) + d'((\alpha_m), (q_m)) \le \frac{1}{n} + d'((\alpha_n), (\alpha_m)) + \frac{1}{m}.$$

Offenbar liegt (q_n) nicht weit von α_n entfernt, daher liegt es nun nahe, dass der Grenzwert von (α_n) gerade der von q_n ist, also $[(a_n)]$ - und tatsächlich:

$$d'(\alpha, (\alpha_n)) \le d'(\alpha, (q_n)) + d'((q_n), (\alpha_n)) \le d'(\alpha, (q_n)) + \frac{1}{n} < \epsilon + \frac{1}{n}$$

Damit konvergiert (α_n) und X_V ist vollständig. Setze nun $X_V \supseteq Y := \overline{i(X)}$, dann ist (Y, d') die Vervollständigung von (X, d).

$\square$

Die so konstruierte Vervollständigung sieht nicht nur auf den ersten Blick anders aus als die von Hausdorff - die Objekte in diesen Räumen sind immerhin von völlig unterschiedlicher Natur. An dieser Stelle drängt sich umso stärker die Frage auf, in welchem Sinne die Vervollständigung eindeutig sein soll. Eine Antwort darauf gibt der folgende Satz:

Satz 2 (Eindeutigkeit der Vervollständigung)**.** *Es seien (X, d) ein metrischer Raum, $(Y, d'), (Y', d'')$ Vervollständigungen von (X, d). Dann sind (Y, d') und (Y', d'') zueinander isometrisch isomorph.*

Diese Art der "Eindeutigkeit" ist vergleichbar mit der Art von "Eindeutigkeit", die ein n-dimensionaler K-Vektorraum hat: man kann zwei K-Vektorräume gleicher Dimension umkehrbar eindeutig und "strukturerhaltend" aufeinander abbilden - dennoch können sie völlig verschiedene Basen haben.
In unserem Fall ist die "Eindeutigkeit" sogar etwas stärker: falls (X, d) nicht nur ein metrischer, sondern sogar ein Vektorraum ist, so ist seine Vervollständigung nicht nur bis auf Isomorphie im Sinne der Linearen Algebra bestimmt, sondern es werden sogar die Abstände erhalten. Der Raum kann also nicht mehr "verzerrt" werden. Anschaulich auf den Punkt gebracht sind also zwei (möglicherweise verschiedene) Vervollständigungen eines metrischen Raumes (oder eines Vektorraums) "gleich groß" (Längen in ihnen sind gleich) und haben eine ähnliche *innere* Struktur.
Nun kommen wir zum Beweis.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Isometrien $i: \quad X \longrightarrow Y, i': X \longrightarrow Y'$. Isometrien sind injektiv, also gibt es eine Abbildung $i^{-1}: \quad Y \supset i(X) \longrightarrow X$. Die gesuchte Isometrie ist im wesentlichen $j := i' \circ i^{-1}: i(X) \longmapsto Y'$. Wir müssen diese lediglich "stetig ergänzen" und zeigen, dass die entstehende Funktion eine surjektive Isometrie ist. Nehmen wir an dieser Stelle zunächst an, dass es eine stetige Ergänzung von j gibt, also $j': \quad Y \longrightarrow Y'$ stetig. Wir zeigen, dass dies eine Isometrie ist: sei $x, y \in Y, p_n, q_n \subset i(X) \subset Y$ mit $lim_{n\to\infty} p_n = x, lim_{n\to\infty} = y$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow d''(j'(x), j'(y)) &\leq d''(j'(x), j(p_n)) + d''(j(p_n), j(q_n)) + d''(j(q_n), j'(y)) \\ &= d''(j'(x), j(p_n)) + d'(p_n, q_n) + d''(j(q_n), j'(y)) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \quad d'(x, y)\end{aligned}$$

und natürlich gilt dann die Gleichheit, da $lim_{n\to\infty} d''(j(p_n), j(q_n)) = d''(j'(x), j'(y))$.
Ferner ist j' surjektiv: $j'(Y) \supset \overline{j(Y)} = Y'$. Damit ist für Isometrien, die sich stetig ergänzen lassen, alles gezeigt. Das folgende Lemma impliziert, dass jede gleichmäßig stetige Abbildung (und damit auch jede Isometrie), die auf einer Menge X definiert ist, die in Y dicht liegt, stetig ergänzbar ist. Damit ist alles gezeigt. □

Lemma (Stetige Fortsetzbarkeit). *Seien (X, d) ein metrischer, (Y, d') ein vollständiger metrischer Raum, $S \subset X$ dicht in X (also $\overline{S} = X$), $f: \quad S \longrightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann gibt es eine (eindeutige) gleichmäßig stetige Funktion $F: \quad X \longrightarrow Y$ mit $F|_S = f$.*

Beweis nach J. Heine. Wir wählen zunächst für $x \in S$ die konstante Folge $(x)_j = x \; \forall n \in \mathbb{N}$, für $x \in X \setminus S$ wähle eine beliebige Folge $(x)_j$ mit $(x)_j \to x$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f sind die $(f(x_j))_j$ Cauchy-Folgen in Y, also konvergent. Setze $y_x = \lim_{j\to\infty}(f(x_j))$ für $x \in X \setminus S$ und für $x \in S$ setze $y_x = f(x)$. Offenbar ist dann

$$\begin{aligned}F: &\quad X \longrightarrow Y, \\ F: &\quad x \longmapsto y_x\end{aligned}$$

eine Fortsetzung von f. wir zeigen nun, dass F gleichmäßig stetig ist:
Sei $\epsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall s, s' \in S : d(s, s') < \delta \Rightarrow d'(f(s), f(s')) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Für beliebige $x, x' \in X, d(x, x') < \delta$ folgt $d(x_j, x'_j) \to d(x, x') < \delta$. Für ein hinreichend großes j ist also auch $d(x_j, x'_j) < \delta$, also auch $d'(f(x_j), f(x'_j)) < \frac{\epsilon}{2}$ (denn x_j, x'_j liegen für alle j in S!). Es folgt:

$$\begin{aligned}&d'(f(x_j), f(x'_j)) \to d'(y_x, y_{x'}) \\ \Rightarrow &d'(F(x), F(x')) = d'(y_x, y_{x'}) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

□

Fazit: Wir wissen nun also, dass metrische Räume sich vervollständigen lassen und dass die Vervollständigung bis auf Isometrie eindeutig ist. Man kann an dieser Stelle also von den Details der Konstruktion der

Vervollständigung abstrahieren und einfach nur noch von *der* Vervollständigung sprechen. Doch Vorsicht: Wie wir gesehen haben, ergibt diese Abstraktion nur im Rahmen der Betrachtung als metrischer Raum Sinn. Auf einer anderen Ebene können sich zwei Vervollständigungen gravierend voneinander unterscheiden. Bei der Vervollständigung über Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen könnten wir zum Beispiel nach dem Grenzwert fragen, was bei den beschränkten stetigen Funktionen nicht unbedingt Sinn ergibt.
Wenn wir uns an den Anfang zurückerinnern, war die ursprüngliche Idee, metrischen Räumen einfach Elemente hinzuzufügen, bis sie Vollständig sind. Manchmal ist dies sogar möglich! Betrachte das offene Intervall $(0,1)$,versehen mit $d(x,y) = \mid x-y \mid$. Um diesen Raum zu vervollständigen, müssen wir nicht irgendwelche Cauchy-Folgen oder gar irgendwelche Funktionen betrachten - es reicht völlig aus, die 0 und die 1 hinzuzufügen: $[0,1]$ ist mit d vollständig. Dieses Beispiel hat im Vergleich zu den anderen beiden Konstruktionen besonders wenige "Zusatzeigenschaften" und macht den tatsächlichen Unterschied verschiedener Vervollständigungen besonders deutlich.
Dennoch möchte ich zum Schluss noch die Cantor'sche Konstruktion der Reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen als Spezialfall präsentieren.

Die Reellen Zahlen

Wir stehen hier natürlich zunächst vor einem Problem: wir wollen $\mathbb{Q}$ als metrischen Raum betrachten und $\mathbb{R}$ daraus konstruieren - aber Metriken sind gerade definiert als Abbildungen $d: \quad X \longrightarrow \mathbb{R}$! Um zu umgehen, dass wir die Reellen Zahlen an dieser Stelle schon voraussetzen, bemerken wir, dass bei Cantors Konstruktion diese Eigenschaft nicht unbedingt benötigt wird: rationale Zahlen haben immer auch rationale Abstände zueinander. Als Metrik nehmen wir

$$\begin{aligned} d: &\quad \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \\ d: &\quad (p,q) \longmapsto \mid p-q \mid . \end{aligned}$$

Die oben genannte Konstruktion lässt sich nun eins zu eins übertragen auf diesen Raum. Allerdings hat $\mathbb{R}$ noch ein paar weitere Eigenschaften. Diese sollten wir auch noch nachprüfen. Wir erinnern uns an die Analysis: $\mathbb{R}$ ist ein geordneter (archimedischer) Körper. Wir müssen zeigen, dass unser Konstrukt das auch ist.
Nennen wir hierfür die Cantor'sche Vervollständigung R. Wir definieren nun für $[x_n],[y_n] \in R$ folgende Operationen:

$$\begin{aligned} [x_n] + [y_n] &:= [x_n + y_n], \\ [x_n] \cdot [y_n] &:= [x_n \cdot y_n]. \end{aligned}$$

Wie wir aus der Analysis wissen, gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}((a_n)+(b_n)) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) \text{ und} \\ \lim_{n\to\infty}((a_n)\cdot(b_n)) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) \end{aligned}$$

Dies gilt offenbar auch für die Äquivalenzklassen, also sind die oben definierten Operationen wiederum Assoziativ, Kommutativ und Distributiv. Es gibt für beide ein neutrales Element (für "+" die Klasse der konstanten Nullfolge, die wir 0_R nennen, für "·" die Klasse der konstanten Folge mit Wert 1, die wir 1_R nennen) und auch die Existenz des inversen Elements folgt direkt.
Bleibt zu zeigen, dass es eine Ordnungsrelation gibt. Hierfür sei $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ eine Cauchy-Folge, aber keine Nullfolge - das heißt $\mid a_n \mid > p$ für ein gewisses $p > 0$ und n hinreichend groß. Sei nun n_0 so, dass $\mid a_n - a_m \mid < \frac{p}{2}$ für alle $n, m > n_0$. Wähle nun $m > n_0$ mit

$$\mid a_m \mid \geq p$$

Für alle $n > n_0$ folgt dann

$$\begin{aligned} &\mid a_n - a_m \mid < \frac{p}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a_n - a_m < \frac{p}{2} \text{ oder } a_m - a_n < \frac{p}{2} \\ \Leftrightarrow\ & a_m - \frac{p}{2} < a_n < a_m + \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Falls nun $a_m \geq p > 0$ ist, so folgt

$$\frac{p}{2} = p - \frac{p}{2} \leq a_m - \frac{p}{2} < a_n,$$

und falls $a_m \leq -p < 0$, folgt

$$-\frac{p}{2} = -p + \frac{p}{2} \geq a_m + \frac{p}{2} > a_n.$$

Weitere Fälle gibt es wegen $\mid a_m \mid \geq p$ nicht und offenbar schließen die Fälle einander aus. Damit können wir R in drei "Typen" von Folgen unterteilen: Folgen mit $a_n > 0, n > n_0$, Folgen mit $a_n < 0, n > n_0$ und Nullfolgen. Offenbar haben auch alle Folgen a_n derselben Klasse $[x_n]$ denselben "Typ". Der Typ ist somit nicht nur Eigenschaft einzelner Folgen, sondern ist eine Invariante ihrer ganzen Äquivalenzklasse. Wir nennen daher Klassen $[b_n]$ mit b_n vom ersten Typ "größer 0_R", Klassen mit b_n vom zweiten Typ "kleiner 0_R". Wir schreiben $[b_n] > 0_R$ beziehungsweise $[b_n] < 0_R$. Offenbar erfüllt diese Relation die Ordnungsaxiome: Trichotomie (wie schon gesehen), Invarianz von R_+ unter "+" (wegen $x_n > 0, y_n > 0, n$ hinreichend groß $\Rightarrow x_n + y_n > 0 \Rightarrow [(x_n)] + [(y_n)] > 0_R$) und Invarianz von R_+ unter "$\cdot$" (analog).
Das Archimedische Axiom, das besagt, dass für $y > x > 0$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $nx > y$, folgt, da dieses in $\mathbb{Q}$ schon gilt: Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit verschiedener Äquivalenzklasse. wähle nun k_0 so groß, dass $\mid y_k - x_k \mid \leq \mid [(y_n)] - [(x_n)] \mid + \epsilon$ für ein festes ϵ und alle $k \geq k_0$. Seien o.B.d.A. $[(y_n)] > [(x_n)]$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & y_k > x_k && \text{k hinreichend groß!} \\ \Rightarrow\quad & m x_k > y_k && \text{es gibt ein globales m, da ja } \mid y_k - x_k \mid \text{ beschränkt ist!} \\ \Rightarrow\ & [(m x_n)] > [(y_n)], \end{aligned}$$

was gerade die Behauptung war.
Damit hat R die Eigenschaften der reellen Zahlen (wie in der Analysis definiert als vollständiger geordneter archimedischer Körper) und wir schreiben daher nun $\mathbb{R}$.

Literatur

- J. Heine: Topologie und Funktionalanalysis - Grundlagen der Abstrakten Analysis mit Anwendungen, Oldenbourg Verlag, 2002.
- H. Herrlich et al.: Einführung in die Topologie, Heldermann Verlag, 1986.
- http://bolzano.iam.uni-bonn.de/∼leis/pdf/Infini-I.pdf, Zugriff am 02.02.2013. Es handelt sich um ein Skript zur Infinitesimalrechnung von Prof. Dr. Rolf Leis, Universität Bonn, Wintersemester 1992/93
- http://de.wikipedia.org/wiki/Vollständiger_Raum, Version vom 18.11.2012 12:44 Uhr.