# Beschränktheits- und Kompaktheitsbegriffe

**Alexander Marcel Birx**
E-Mail: alexander_marcel.birx@stud.tu-darmstadt.de

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik,
Technische Universität Darmstadt

# Inhaltsverzeichnis

**1 Vorwort** **2**

**2 Kompaktheit und Beschränktheit im metrischen Raum** **3**

2.1 Beschränktheit und Präkompaktheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
2.2 Überdeckungskompaktheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
2.3 Vollständigkeit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5
2.4 Folgenkompaktheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
2.5 Äquivalenz von Kompaktheitsdefinitionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
2.6 Der Satz von Heine-Borel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

**3 Kompaktheit im topologischen Raum** **10**

3.1 Überdeckungskompaktheit im topologischen Raum . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
3.2 Filter . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
3.3 Charakterisierung von Kompaktheit über Filter . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
3.4 Hausdorff-Räume . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3.5 Kompaktheit und stetige Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3.6 Relative Kompaktheit . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
3.7 Kompaktifizierung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

# 1 Vorwort

Diese Ausarbeitung hat das Thema Beschränkheits- und Kompaktheitsbegriffe.
Der Begriff der Kompaktheit ist einer der zentralsten Begriffe der allgemeinen Topologie, weswegen es nötig ist detailliert auf weitere große Themen der Topologie einzugehen. Da die detaillierte Einführung dieser Themen jedoch den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengen würde, werden im Folgenden einige elementare Dinge, wie beispielsweise mengentheoretische Grundlagen, als bekannt angesehen.

Weiterführende Themen, wie die Konzepte von metrischen und topologischen Räumen oder Filter, werden kurz einführt und Literaturangaben zu detaillierteren Einführungen gemacht.

Diese Ausarbeitung ist in zwei große Bereiche zu unterteilen: Im ersten Abschnitt werden wir Begriffe wie **Beschränktheit** und **Präkompaktheit** (Totalbeschränktheit) untersuchen. Den Begriff der **Kompaktheit** werden wir im Folgenden durch **offene Überdeckungen** und durch **Folgen** charakterisieren. Weiter werden wir zeigen, dass eine Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn sie präkompakt und vollständig ist. Abschließen werden wir diesen ersten Abschnitt mit dem **Satz von Heine-Borel**.

Im zweiten Abschnitt werden wir Kompaktheit im topologischen Raum behandeln. Hierbei wird die Kompaktheit, wie bereits im metrischen Raum, durch **offene Überdeckungen** charakterisiert. Anstatt mit Folgenkompaktheit werden wir uns jedoch mit **Filterkompaktheit** beschäftigen. Hierfür wird es erst einmal nötig sein, den Begriff des **Filters** angemessen detailliert einzuführen. Zudem werden wir den Begriff der **relativen Kompaktheit** einführen und untersuchen. Abschließend werden wir noch kurz auf das Thema **Kompaktifizierung** eingehen.

# 2 Kompaktheit und Beschränktheit im metrischen Raum

## 2.1 Beschränktheit und Präkompaktheit

In diesem Abschnitt werden wir Beschränktheit und Präkompaktheit im metrischen Raum definieren. Zu allererst werden wir jedoch das Konzept des metrischen Raumes einführen. Eine detailliertere Einführung in das Thema metrische Räume ist Teil von Proseminar (4) und kann zudem auf den Seiten 10-12 in [4] nachgelesen werden.

**2.1.1 Definition.** (Metrischer Raum)
Ein *metrischer Raum* ist ein geordnetes Paar $(X, d)$ aus einer Menge $X$ und einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

i.) $\forall x, y \in X : d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Definitheit)

ii.) $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

iii.) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

**2.1.2 Definition.** (Beschränktheit)
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *beschränkt* genau dann, wenn ein $x_0 \in A$ und ein $r > 0$ existieren, sodass gilt:

$$d(x_0, x) \leq r, \quad \forall x \in A$$

Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist also beschränkt, wenn sie in einer Kugel mit endlichem Radius enthalten ist.

**2.1.3 Definition.** (Präkompaktheit)
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *präkompakt* bzw. *totalbeschränkt* genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Anzahl Punkte $x_1, ..., x_n \in A$ existiert, sodass gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in M : d(x, x_i) < \epsilon\}$$

Eine Teilmenge eines metrischen Raums ist also präkompakt, wenn sie mit einer endlichen Anzahl Kugeln mit Radius $\epsilon$ überdeckt werden kann.

*Bemerkung.* Die Menge $N_\epsilon := \{x_1, ..., x_n\}$ nennt man auch *$\epsilon$-Netz*.

Nun stellt sich die Frage, in welchem Zusammenhang Beschränktheit und Präkompaktheit stehen. Der folgende Satz gibt hierüber Auskunft.

**2.1.4 Satz.** *Jede präkompakte Menge ist beschränkt.*

*Beweis.* Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ präkompakt. Dann gilt für ein r-Netz $\{x_1, ..., x_n\}$

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i),$$

wobei $B_r(x_i)$ hierbei die Kugel mit Radius $r$ und Mittelpunkt $x_i$ ist.
Sei nun $N := \max_{i\in\{1,...,n\}} d(x_1, x_i) + r$ , dann gilt:

$$B_r(x_k) \subseteq B_N(x_1) \quad \forall k \in \{1, ..., n\} \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B_N(x_1)$$

Somit ist A beschränkt. □

## 2.2 Überdeckungskompaktheit

Wir wenden uns nun der zentralen Definition dieser Ausarbeitung zu: Die Charakterisierung von Kompaktheit durch offene Mengen. Diese Definition der Überdeckungskompaktheit gilt nicht nur im metrischen Raum, sondern ist auch in fast exakt gleicher Formulierung im topologischen Raum gültig. Bevor wir jedoch zu besagter Definition vorstoßen müssen wir vorbereitend den Begriff der offenen Überdeckung definieren.

**2.2.1 Definition.** (offene Überdeckung)
Sei $K$ eine Menge und $I$ eine beliebige Indexmenge. Die Familie offener Mengen $(O_i)_{i\in I}$ heißt *offene Überdeckung* von $K$ genau dann, wenn die Mengen $O_i$ für alle $i \in I$ offen sind und zusätzlich gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$$

**2.2.2 Bemerkung.** Die Definition einer offenen Menge kann auf Seite 19 in [5] nachgelesen werden. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge, also $X \setminus A$, offen ist.

Mit dem Begriff der Überdeckung ausgestattet können wir nun Überdeckungskompaktheit definieren.

**2.2.3 Definition.** (Überdeckungskompaktheit)
Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Die Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *überdeckungskompakt* genau dann, wenn man aus jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von $A$ die Mengen $O_1, ..., O_N$ entnehmen kann, sodass gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} O_i$$

Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist also kompakt, wenn jede ihrer offenen Überdeckungen eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

**2.2.4 Bemerkung.** Es ist nicht schwer einzusehen, dass jede kompakte Teilmenge $A \subseteq X$ auch präkompakt ist, denn nach der Definition von Kompaktheit hat jede unendliche Überdeckung von $A$ durch offene $\epsilon$-Kugeln eine endliche Teilüberdeckung. Hieraus folgt natürlich mit Satz 2.1.4 auch, dass jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes beschränkt ist.

Dass eine präkompakte Menge kompakt ist, gilt offensichtlich im Allgemeinen nicht, was uns zu der Frage führt, welche Eigenschaft eine präkompakte Menge noch benötigt, um kompakt zu werden.

## 2.3 Vollständigkeit

Im folgenden Abschnitt werden wir die Vollständigkeit eines metrischen Raumes definieren. Hierfür definieren wir vorbereitend den Begriff der Cauchy-Folge. Später werden wir sehen, dass jede Teilmenge eines metrischen Raumes genau dann kompakt ist, wenn Sie präkompakt und vollständig ist.

**2.3.1 Definition.** (Cauchy-Folge)
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt *Cauchy-Folge* genau dann, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_0.$$

**2.3.2 Definition.** (Vollständigkeit)
Ein metrischer Raum $(X, d)$ heißt *vollständig*, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert.

**2.3.3 Satz.** *Sei $(X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.) $A$ ist abgeschlossen*

*ii.) $A$ ist vollständig*

*Hinweis: Der folgende Beweis verwendet den Begriff $\partial A$ (Rand von A), welcher auf Seite 32 in [5] für den topologischen Raum definiert wird. Diese Definition gilt auch im metrischen Raum.*

*Beweis.* i) $\Rightarrow$ ii):
Wir nehmen an $A$ sei nicht vollständig. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ also eine Cauchy-Folge, die gegen ein $x \in X \backslash A$ konvergiert. Da $X \backslash A$ nach Voraussetzung offen ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(x) \subset X \backslash A$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $d(a_n, x) < \epsilon$ für alle $n \geq N_0$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilmenge von $A$ ist.

ii) $\Rightarrow$ i):
Da $A$ nach Voraussetzung vollständig ist, konvergiert jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ gegen ein $x \in A$. Insbesondere existiert für jedes $x \in \partial A$ eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, die gegen besagtes $x$ konvergiert. Somit gilt $\partial A \subset A$, woraus folgt, dass $A$ abgeschlossen ist. □

## 2.4 Folgenkompaktheit

Bevor wir nun zeigen, dass Vollständigkeit in der Tat die Eigenschaft ist, die eine präkompakte Menge zu einer kompakten macht, wollen wir noch Kompaktheit durch Folgen charakterisieren.

**2.4.1 Definition.** (Folgenkompaktheit)
Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ heißt *folgenkompakt* genau dann, wenn jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

## 2.5 Äquivalenz von Kompaktheitsdefinitionen

Wir haben nun also Kompaktheit durch Überdeckung und durch Folgen charakterisiert und hegen die Vermutung, dass präkompakte, vollständige Teilmengen eines metrischen Raumes ebenfalls kompakt sind. Im Folgenden werden wir zeigen, dass sogar alle drei Aussagen äquivalent sind.

**2.5.1 Satz.** *Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.) A ist folgenkompakt*

*ii.) A ist präkompakt und vollständig*

*iii.) A ist überdeckungskompakt*

*Beweis.* i) $\Rightarrow$ ii):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Cauchy-Folge. Nach Voraussetzung besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufgrund der Definition einer Cauchy-Folge nur einen Häufungspunkt besitzt und keine divergenten Teilfolgen haben kann, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst konvergent. Somit ist $A$ vollständig.

Wir nehmen nun an, $A$ wäre nicht präkompakt. Dies würde bedeuten, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, für das kein endliches $\epsilon$-Netz existiert. Wir definieren nun induktiv eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, für die folgendes gilt:
Sei $b_1$ beliebig. Die Punkte $b_1, \dots, b_n$ seien nun bereits so definiert, dass

$$d(b_i, b_j) \geq \epsilon \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}, \quad i \neq j$$

gilt. Dann existiert ein $b_{n+1} \in A$ für das

$$d(b_i, b_{n+1}) \geq \epsilon \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

gilt, da sonst $\{b_1,\dots,b_n\}$ bereits ein $\epsilon$-Netz gewesen wäre.
Da sich die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in dieser Weise beliebig fortsetzen lässt und der Abstand zwischen zwei Elementen immer größer oder gleich $\epsilon$ ist, kann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt und somit keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von $A$.

ii) $\Rightarrow$ iii):
Nach Voraussetzung ist $A$ präkompakt und vollständig. Wir nehmen nun an $A$ wäre nicht kompakt, dann gäbe es eine offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ von $A$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Aus der Präkompaktheit von $A$ folgt, dass ein endliches 1-Netz $F$ existiert, wobei die Kugeln um die Punkte von $F$ mit Radius $r = 1$ die Menge $A$ überdecken. Ließe sich jede dieser Kugeln von endlich vielen $O_i$ überdecken, würde sich auch $A$ mit endlich vielen $O_i$ überdecken lassen. Es muss also eine Kugel $B_1 := B_1(x_1)$ existieren, sodass sich $A \cap B_1$ nicht von endlich vielen $O_i$ überdecken lässt.
Wir gehen nun erneut induktiv vor: Sei $B_1$ unser Induktionsanfang und $B_{n-1} = B_{2^{-(n-1)}}(x_{n-1})$ bereits so gewählt, dass $A \cap B_{n-1}$ nicht von endlich vielen $O_i$ überdeckt werden kann. Aufgrund der Präkompaktheit von A existieren nun endlich viele Kugeln $C_1, ..., C_m$ mit Radius $2^{-n}$, die A überdecken. Von den Kugeln, für die $A \cap B_{n-1} \cap C_i \neq \emptyset$ gilt, existiert mindestens eine, sodass sich $A \cap C_i$ nicht von endlich vielen $O_i$ überdecken lässt. Sei $x_n$ der Mittelpunkt von $C_i$, dann setzen wir $B_n = B_{2^{-n}}(x_n)$. Da $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$, gilt

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq 2^{-n+1} + 2^{-n} \leq 2^{-n+2}.$$

Wir wählen nun zu jedem $B_n$ ein $a_n \in A \cap B_n$. Dann gilt aufgrund der Dreiecksungleichung:

$$d(a_{n-1}, a_n) \leq d(a_{n-1}, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, a_n) \leq \frac{3}{2^{n-2}}$$

Weiter folgt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$:

$$\begin{aligned}
d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a_{n+2}) + ... + d(a_{m-1}, a_m) \\
&\leq \frac{3}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{m-n+1} \frac{1}{2^i} \\
&\leq \frac{3}{2^{n-2}}
\end{aligned}$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit eine Cauchy-Folge, welche aufgrund der Vollständigkeit von $A$ gegen ein $a \in A$ konvergiert. Es existiert also ein $i_0 \in I$ für das $a \in O_{i_0}$ gilt. Da $O_{i_0}$ eine offene Menge ist existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $B_\epsilon(a) \subset O_{i_0}$. Zudem existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a, a_n) \leq \frac{3}{2^{n-2}} < \frac{\epsilon}{2}$ und somit auch $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4}$.
Für jedes $x \in A \cap B_n$ gilt somit:

$$d(x, a) \leq d(x, x_n) + d(x_n, a_n) + d(a_n, a) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Hieraus folgt jedoch, dass alle $x \in A \cap B_n$ in $B_\epsilon(a)$ und somit auch in $O_{i_0}$ liegen. Die Menge $A \cap B_n$ besitzt somit sehr wohl eine endliche Teilüberdeckung, nämlich $O_{i_0}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer Definition von $B_n$.

iii) $\Rightarrow$ i):
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ eine Folge und $F_n$ der Abschluss der Menge $\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$. Wir nehmen nun an es würde

$$A \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset$$

gelten. Das heißt wir nehmen an $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ hätte keinen Häufungspunkt in A.
Dann gilt:

$$A \subset X \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash F_n),$$

wobei $X\backslash F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen ist. Da $A$ nach Voraussetzung kompakt ist, wird $A$ auch von endlich vielen dieser Mengen überdeckt, das heißt:

$$A \subset (X\backslash F_{n_1} \cup \ldots \cup X\backslash F_{n_k}) = X \backslash \bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}$$

Für $n > \max_{i\in\{1,\ldots,k\}} n_i$ gilt $F_n \subset \bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}$ und somit auch $A \subset X\backslash F_n$, woraus folgt, dass $A \cap F_n = \emptyset$ gilt, was ein Widerspruch zur Definition von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ besitzt also einen Häufungspunkt in $A$ und hat somit eine konvergente Teilfolge, woraus folgt, dass $A$ folgenkompakt ist. □

## 2.6 Der Satz von Heine-Borel

Wir wagen nun noch einen Abstecher in den euklidischen $\mathbb{R}^n$. Hier lässt sich Kompaktheit besonders einfach als abgeschlossen und beschränkte Menge charakterisieren.

**2.6.1 Satz.** *(Satz von Heine-Borel)*
*Sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.) A ist kompakt*

*ii.) A ist abgeschlossen und beschränkt*

*Beweis.* i) $\Rightarrow$ ii):
Nach Bemerkung 2.2.3 ist jede kompakte Menge beschränkt. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $A$ abgeschlossen ist.
Sei $x \notin A$. Wir wählen nun zu jedem $a \in A$ einen Radius $r_a < d(x, a)$, sodass $\bigcup_{a\in A} B_{r_a}(a)$ eine offene Überdeckung von A ist. Da $A$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung mit

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{a_i}}(a_i).$$

Sei nun $r = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} d(x, a_i) - r_{a_i}$, dann ist $B_r(x)$ eine Umgebung von $x$, die ganz in $X\backslash A$ liegt. Da man diese Umgebung für alle $x \in X\backslash A$ bilden kann, ist $X\backslash A$ offen und $A$ als Komplement von $X\backslash A$ abgeschlossen.

ii) $\Rightarrow$ i):
Wir zeigen zunächst, dass jede beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$ präkompakt ist. Dies gilt natürlich nicht in einem allgemeinen metrischen Raum.
Im $\mathbb{R}^n$ bilden die Punkte $(\frac{i_1}{k}, \frac{i_2}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k}) \in \mathbb{R}^n$ mit $i_j \in \mathbb{Z}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $k^{-1}$-Netz. Da die Menge $A$ beschränkt ist, enthält sie nur endlich viele dieser Punkte, woraus folgt, dass $A$ präkompakt ist.
Da $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, folgt nach Satz 2.3.3, dass $A$ als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ebenfalls vollständig ist. Nach Satz 2.5.1 folgt mit der Präkompaktheit und Vollständigkeit von $A$, die Kompaktheit von $A$. $\square$

# 3 Kompaktheit im topologischen Raum

## 3.1 Überdeckungskompaktheit im topologischen Raum

Im zweiten Kapitel dieser Ausarbeitung beschäftigen wir uns mit Kompaktheit im topologischen Raum. Das Konzept des topologischen Raumes wird in [5] ab Seite 21 und in [1] ab Seite 74 ausführlich erklärt. Dennoch werden wir kurz die Definition darlegen.
Hinweis: Die Menge $\mathcal{P}(X)$ bezeichnet im Folgenden die Potenzmenge der Menge $X$.

**3.1.1 Definition.** (Topologischer Raum)
Sei $X$ eine Menge und $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. Die Familie von Mengen $\tau$ heißt *Topologie* auf $X$ genau dann, wenn

i.) $\emptyset \in \tau$ und $X \in \tau$

ii.) $\forall A, B \in \tau : A \cap B \in \tau$

iii.) $\forall \mathcal{A} \subseteq \tau : (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) \in \tau$

gelten. Das Tupel $(X, \tau)$ heißt *topologischer Raum* und die Elemente von $\tau$ heißen *offene Mengen* des topologischen Raumes $(X, \tau)$.

Es ist leicht zu sehen, dass ein topologischer Raum gänzlich ohne Abstandsbegriff auskommt, weshalb topologische Räume im Allgemeinen nicht metrisch sind. Umgekehrt jedoch bildet jeder metrische Raum $(X, d)$ mit $\tau_d := \{O \subseteq X \mid O \text{ offen bzgl. } d\}$ eine Topologie auf $X$. Ohne Abstandsbegriff ist der klassische Konvergenzbegriff nicht mehr anwendbar, denn wie soll eine Folge einem Punkt unendlich nahe kommen, wenn der Abstand nicht bestimmbar ist?
Folgerichtig kann Kompaktheit im topologischen Raum im Allgemeinen auch nicht durch Folgen charakterisiert werden. Die Definition der Überdeckung ist jedoch auch im topologischen Raum gültig, weshalb die Charakterisierung von Kompaktheit durch offene Überdeckungen ähnlich wie im metrischen Raum funktioniert.
Bevor wir jedoch zur Überdeckungskompaktheit im topologischen Raum vorstoßen, werden wir noch den Begriff der Basis und der Subbasis einer Topologie einführen.

**3.1.2 Definition.** (Basis einer Topologie)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt *Basis* der Topologie $\tau$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall O \in \tau : \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} : O = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist somit eine Basis von $\tau$, wenn jedes Element aus $\tau$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ dargestellt werden kann.

**3.1.3 Definition.** (Subbasis einer Topologie)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Die Familie von Mengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Subbasis* der Topologie $\tau$ genau dann, wenn die Familie

$$\mathcal{B} := \{\bigcap_{i=1}^{n} S_i \mid n \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S}\}$$

aller endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\tau$ ist.

**3.1.4 Definition.** (Überdeckungskompaktheit)
Ein topologischer Raum $(X, \tau)$ heißt *überdeckungskompakt* genau dann, wenn man aus jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ von $X$ die Mengen $O_1, \dots, O_N$ entnehmen kann, sodass gilt:

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} O_i$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt kompakt, wenn sie als Teilraum von $X$ kompakt ist.

**3.1.5 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein kompakter topologischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge von $(X, \tau)$ kompakt.*

*Beweis.* Sei $A \subset X$ und $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $A$. Da $X \setminus A$ nach Voraussetzung offen ist, ist $(X \setminus A) \cup (O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Da $X$ kompakt ist, besitzt besagte Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung, welche insbesondere auch $A$ überdeckt. □

## 3.2 Filter

Da wir also Kompaktheit im topologischen Raum im Allgemeinen nicht über Folgen charakterisieren können, stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist das Konzept von Folgen und Folgenkonvergenz so zu modifizieren, dass es ohne Abstandsbegriff auskommt und somit im topologischen Raum anwendbar ist. Dies führt uns im weiteren Verlauf auf den Begriff des Filters, welcher Thema von Proseminar (3) ist. Um sinnvoll mit diesem Konstrukt arbeiten zu können ist es nötig im Folgenden eine kleine Einführung in das Thema Filter zu geben. Eine detaillierte Einführung findet man unter Anderem in [5] ab Seite 68 und in [1] ab Seite 45.

**3.2.1 Definition.** (Filter)
Sei $X \neq \emptyset$. Eine nichtleere Familie $\varphi \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Filter* auf $X$ genau dann, wenn

i.) $\emptyset \notin \varphi$

ii.) $A \in \varphi \wedge B \in \varphi \Rightarrow A \cap B \in \varphi$

iii.) $A \in \varphi \wedge B \supseteq A \Rightarrow B \in \varphi$

gelten. Die Menge aller Filter auf $X$ bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(X)$.

**3.2.2 Definition.** (Hauptfilter und Einpunktfilter)
Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann bezeichnen wir das Mengensystem

$$[A] := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid B \supseteq A\}$$

als den von $A$ erzeugten *Hauptfilter*. Ist $A := \{x\}$ einelementig, so nennen wir $\dot{x} := [\{x\}]$ den von $x$ erzeugten *Einpunktfilter*.

**3.2.3 Definition.** (Grobheit, Feinheit und Ultrafilter)
Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}(X)$. Dann heißt $\varphi_1$ *gröber* als $\varphi_2$ bzw. $\varphi_2$ *feiner* als $\varphi_1$ genau dann, wenn

$$\varphi_1 \subset \varphi_2$$

gilt. Ein Filter $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ heißt *Ultrafilter* auf $X$, wenn kein Filter auf $X$ existiert, der feiner als $\varphi$ ist.

**3.2.4 Definition.** (Oberfilter)
Sei $\mathcal{F}(X)$ die Menge aller Filter auf $X$ und $\varphi \in \mathcal{F}(X)$. Dann bezeichnen wir das Mengensystem

$$\mathcal{F}(\varphi) := \{\psi \in \mathcal{F}(X) \mid \psi \supseteq \varphi\}$$

als Menge aller *Oberfilter* von $\varphi$.

**3.2.5 Bemerkung.** Offensichtlich ist jeder Filter, der feiner als $\varphi$ ist, Oberfilter von $\varphi$. Ultrafilter besitzen offensichtlich keine Oberfilter außer sich selbst.

**3.2.6 Definition.** (Filterbasis und Filtersubbasis)
Eine Familie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge $X$ heißt *Filterbasis* genau dann, wenn die Menge

$$[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}(X)} := \{B \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{A} : A \subseteq B\}$$

aller Obermengen von Elementen aus $\mathcal{A}$ ein Filter ist.

Eine Familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen einer nichtleeren Menge $X$ heißt *Filtersubbasis* genau dann, wenn die Menge

$$[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)} := \{C \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B} : \bigcap_{i=1}^{n} B_i \subseteq C\}$$

aller Obermengen endlicher Schnitte von Elementen aus $\mathcal{B}$ ein Filter ist. Die Filter $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}(X)}$ bzw. $[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ nennen wir den von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ *erzeugten* Filter.

**3.2.7 Satz.** *Sei $X$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Sind alle endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{B}$ nichtleer, so ist $\mathcal{B}$ eine Filtersubbasis.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass $[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ ein Filter ist. Da endliche Schnitte von $\mathcal{B}$ nach Voraussetzung nichtleer sind und $[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ aus Obermengen endlichen Schnitten von Elementen aus $\mathcal{B}$ besteht, gilt $\emptyset \notin [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$. Sei nun

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \subseteq B \in [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)} \quad \text{und} \quad \bigcup_{j=1}^{n} C_j \subseteq C \in [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$$

mit $B_i, C_j \in \mathcal{B}$, dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} C_i \subseteq B \cap C$$

und somit auch $B \cap C \in [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$. Sei nun $D \in [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ und $E \supseteq D$. Dann folgt direkt aus der Definition von $[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$, dass auch $E \in [\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ gilt. Somit ist $[\mathcal{B}]_{\mathcal{F}(X)}$ ein Filter und $\mathcal{B}$ eine Filtersubbasis. □

**3.2.8 Definition.** (Filterkonvergenz und Umgebungsfilter)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\varphi \in \mathcal{F}(x)$. Wir sagen $\varphi$ *konvergiert gegen* $x$ genau dann, wenn

$$\varphi \supseteq \dot{x} \cap \tau$$

gilt. Also enthält $\varphi$ alle $\tau$-offenen Mengen als Element, die $x$ wiederum als Element enthalten.
Für $\varphi$ *konvergiert gegen* $x$ schreiben wir auch $\varphi \xrightarrow{\tau} x$.
Den von $\dot{x} \cap \tau$ erzeugten Filter

$$\underline{U}^{\tau}(x) := \{B \subseteq X \mid \exists O \in \tau : x \in O \subseteq B\}$$

nennen wir *Umgebungsfilter* von $x$ bezüglich $\tau$. Die Elemente von $\underline{U}^{\tau}(x)$ nennen wir *Umgebungen* von x.

**3.2.9 Definition.** (Berührungspunkt)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $\varphi \in \mathcal{F}(X)$. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Berührungspunkt* von $\varphi$ genau dann, wenn es einen Oberfilter von $\varphi$ gibt, der gegen $x$ konvergiert.
Für $X \subseteq A$ heißt $x \in X$ *Berührungspunkt* der Menge $A$ genau dann, wenn er Berührungspunkt des Hauptfilters $[A]$ ist.

Der folgende Satz wird sich in den kommenden Beweisen als nützlich erweisen.

**3.2.10 Satz.** *Sei $X$ eine Menge und $\varphi \in \mathcal{F}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.)* $\varphi$ *ist ein Ultrafilter*

*ii.)* $\forall A \subseteq X : (A \in \varphi) \vee (X \setminus A \in \varphi)$

*iii.)* $\forall n \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(X) : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, n\} : A_i \in \varphi$

*Beweis.* i) $\Rightarrow$ ii):
Sei $\varphi$ ein Ultrafilter auf $X$. Wir nehmen nun an es würde ein $A \subset X$ existieren mit $A \notin \varphi$ und $X \setminus A \notin \varphi$. Da $X \setminus A$ nicht in $\varphi$, ist nach Definition auch keine Teilmenge von $X \setminus A$ in $\varphi$. Hieraus folgt

$$\forall P \in \varphi : P \cap A \neq \emptyset,$$

da sonst $P \subset X \setminus A$ gelten würde. Wir definieren nun die Menge

$$\varphi' := \{B \subseteq X \mid \exists P \in \varphi : P \cap A \subseteq B\}.$$

Man prüft leicht nach, dass $\varphi'$ selbst ein Filter ist. Da $A \in \varphi'$ und $\varphi \in \varphi'$, ist $\varphi'$ Oberfilter von $\varphi$. Da $\varphi$ jedoch ein Ultrafilter ist, steht dies im Widerspruch zu Bemerkung 3.2.5.

ii) $\Rightarrow$ iii):
Gelte nun ii). Wir nehmen nun an es gäbe endlich viele Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ von $X$, sodass

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi \wedge (\forall i \in \{1, \ldots, n\} : A_i \notin \varphi)$$

gilt. Nach Voraussetzung gilt dann $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : (X \setminus A_i) \in \varphi$ und nach Defintion 3.2.1 auch

$$\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi.$$

Da also $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi$ und $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \varphi$ gilt, muss auch der Schnitt dieser beiden Mengen, nämlich die leere Menge, in $\varphi$ liegen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Definition 3.2.1.

iii) $\Rightarrow$ i):
Gelte nun iii). Wir nehmen an, $\varphi$ wäre kein Ultrafilter, dann existiert ein Filter $\psi \supset \varphi$ und ein $A \in \psi$ mit $A \notin \varphi$. Nun gilt $X = A \cup (X \setminus A) \in \varphi$ und nach Voraussetzung auch $X \setminus A \in \varphi$ (da $A \notin \varphi$ gewählt wurde). Da $\varphi \subseteq \psi$ gilt offensichtlich auch $X \setminus A \in \psi$.
Da also $A \in \psi$ und $X \setminus A \in \psi$ gilt, muss auch der Schnitt dieser beiden Mengen, nämlich die leere Menge, in $\psi$ liegen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Definition 3.2.1. $\square$

## 3.3 Charakterisierung von Kompaktheit über Filter

Wie bereits erwähnt ist Folgenkonvergenz in klassischer Weise im topologischen Raum nicht möglich. Im vergangenen Abschnitt haben wir uns jedoch Filter und Filterkonvergenz definiert. Nun stellt sich die Frage, ob es im topologischen Raum möglich ist, Kompaktheit durch Filterkonvergenz zu charakterisieren.

**3.3.1 Satz.** *Sei $(X,\tau)$ ein topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.)* *$(X,\tau)$ ist überdeckungskompakt*

*ii.)* *Jeder Ultrafilter auf $X$ konvergiert gegen ein $x \in X$*

*iii.)* *Jeder Filter auf $X$ besitzt einen Oberfilter, der gegen ein $x \in X$ konvergiert*

*iv.)* *Jede Familie abgeschlossener Teilmengen von $X$, deren Schnitt leer ist, besitzt eine endliche Teilfamilie, deren Schnitt ebenfalls leer ist*

*Beweis.* i) $\Rightarrow$ ii):
Sei $(X,\tau)$ kompakt und $\varphi$ Ultrafilter auf $X$. Wir nehmen nun an $\varphi$ würde nicht gegen ein $x \in X$ konvergieren. Dann muss nach Definition 3.2.8 für alle $x \in X$ eine offene Menge $O_x$ existieren, sodass

$$(O_x \in \tau \cap \dot{x}) \wedge (O_x \notin \varphi)$$

gilt. Da $x \in O_x$ für alle $x \in X$ gilt, bildet die Menge aller $O_x$ offensichtlich eine offene Überdeckung von X. Es gilt also:

$$X = \bigcup_{x \in X} O_x$$

Da $(X,\tau)$ nach Voraussetzung kompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung $O_{x_1},\ldots,O_{x_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
Da offensichtlich $X \in \varphi$ gilt, gilt ebenso $\bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \in \varphi$ und da $\varphi$ ein Ultrafilter ist, folgt mit Satz 3.2.10, dass ein $O_{x_i}$ existiert mit $O_{x_i} \in \varphi$, was im Widerspruch zur Definition von $O_{x_i}$ steht.
Somit konvergiert $\varphi$ gegen ein $x \in X$.

ii) $\Rightarrow$ iii):
Sei $\varphi$ ein Filter auf $X$ und $\mathcal{F}(\varphi) := \{\psi \supseteq \varphi \mid \psi \in \mathcal{F}(X)\}$ die Menge aller Oberfilter von $\varphi$. Durch Überprüfen der Definition 3.2.1 erkennt man, dass $\chi := \bigcup_{\psi \in \mathcal{F}(\varphi)} \psi$ wiederum ein Filter auf $X$ ist, nämlich das Maximum von $\mathcal{F}(\varphi)$ bezüglich Inklusion.
Somit hat jedes $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ einen Oberfilter der ebenso Ultrafilter ist, welcher nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert.

iii) $\Rightarrow$ iv):
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $X$ mit $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$. Wir nehmen nun an es gibt keine endliche Teilfamilie von $\mathcal{A}$, deren Schnitt leer ist. Nach Satz 3.2.7 ist $\mathcal{A}$ somit eine Filtersubbasis und nach Voraussetzung besitzt der von $\mathcal{A}$ erzeugte Filter $[\mathcal{A}]_{\mathcal{F}(X)}$ einen Oberfilter $\varphi$, der gegen ein $x \in X$ konvergiert. Da somit $\varphi \supset [\mathcal{A}]_{\mathcal{F}(X)}$ gilt, ist $x$ Berührungspunkt jedes $A \in \mathcal{A}$. Da alle $A \in \mathcal{A}$ abgeschlossen sind, folgt, dass $\forall A \in \mathcal{A} : x \in A$ und folglich $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ gilt. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \emptyset$.
Somit existiert eine endliche Teilfamilie von $\mathcal{A}$ deren Schnitt leer ist.

iv) $\Rightarrow$ i):
Sei $(O_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von $X$, dann gilt:

$$X = \bigcup_{i \in I} O_i \quad \Leftrightarrow \quad \emptyset = X \setminus \bigcup_{i \in I} O_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus O_i)$$

Somit folgt, dass $\mathcal{A} := \{X \backslash O_i \mid i \in I\}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von $X$ mit leerem Schnitt ist. Nach Voraussetzung gibt es nun also endlich viele $O_1, ..., O_n \in (O_i)_{i \in I}$ mit $n \in \mathbb{N}$, derart, dass

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash O_i) = X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} O_i \quad \Leftrightarrow \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$$

gilt. Somit enthält $(O_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung. □

**3.3.2 Satz.** *(Alexander'scher Subbasissatz)*
*Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\tau$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.)* *$(X, \tau)$ ist kompakt*

*ii.)* *Jede Überdeckung von $X$ mit Elementen aus $\mathcal{S}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung*

*Beweis.* i) ⇒ ii):
Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\tau$ ist, ist $\mathcal{B} := \{\bigcap_{i=1}^{n} S_i \mid n \in \mathbb{N}, S_i \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\tau$, welche nach Definition 3.1.2 nur offene Mengen enthält. Wir nehmen nun an, $\mathcal{S}$ enthalte Mengen, die nicht offen sind, d.h. es existiert mindestens ein $A_1 \in \mathcal{S}$ mit $A_1 \notin \tau$. Dann müsste $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1 \in \mathcal{B}$ gelten. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Tatsache, dass $\mathcal{B}$ nur offene Mengen enthält. Die Subbasis $\mathcal{S}$ enthält somit ebenfalls nur offene Mengen, woraus folgt, dass eine Überdeckung von $X$ mit Elementen aus $\mathcal{S}$ eine offene Überdeckung ist, welche nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

ii) ⇒ i):
Sei nun $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\tau$ und enthalte jede Überdeckung von $X$ mit Elementen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung. Wir nehmen nun an $(X, \tau)$ sei nicht kompakt, dann existiert nach Satz 3.3.1 ein Ultrafilter $\varphi$ auf $X$, welcher nicht gegen ein Element aus $X$ konvergiert. Es existiert somit zu jedem $x \in X$ eine offene Menge $O_x$ mit $x \in O_x \in \dot{x} \cap \tau$ und $O_x \notin \varphi$. Aus Definition 3.1.2 und 3.1.3 folgt, dass jedes $O_x$ die Vereinigung endlicher Schnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ ist. Es existieren somit insbesondere $S_i \in \mathcal{S}$, $i \in \{1, ..., n\}$ mit

$$O_x \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} S_i \qquad \text{und} \qquad x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$$

Für mindestens eines dieser $S_i$ muss $S_i \notin \varphi$ gelten, da sonst nach Definition 3.2.1 die Menge $O_x$ in $\varphi$ wäre. Es existiert somit für alle $x \in X$ ein $S_x \in \mathcal{S}$ mit $x \in S_x \notin \varphi$, woraus

$$X = \bigcup_{x \in X} S_x$$

folgt. Nach Voraussetzung sind existieren nun schon endlich viele $S_{x_1}, ..., S_{x_m} \in \mathcal{S}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{m} S_{x_k}$, woraus $\bigcup_{k=1}^{m} S_{x_k} \in \varphi$ folgt. Mit Satz 3.2.10 folgt, dass eines dieser $S_{x_k}$ Element von $\varphi$ sein muss. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Wahl der Elemente $S_{x_k}$. □

## 3.4 Hausdorff-Räume

Wir führen im Folgenden den Begriff des Hausdorff-Raumes ein. Dieser ist benannt nach dem deutschen Mathematiker Felix Hausdorff (1868-1942), welcher als einer der Mitbegründer der allgemeinen Topologie gilt.

**3.4.1 Definition.** (Hausdorff-Raum)
Ein topologischer Raum $(X, \tau)$ heißt *Hausdorff-Raum* genau dann, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ offene Mengen $U_x, U_y \in \tau$ gibt mit $U_x \cap U_y = \emptyset$, $x \in U_x$ und $y \in U_y$.

**3.4.2 Satz.** *Ist $(X, \tau)$ ein Hausdorff-Raum, so ist die Filterkonvergenz in $(X, \tau)$ eindeutig. Es gilt somit:*

$$\forall \varphi \in \mathcal{F}(X), x, y \in X : \varphi \xrightarrow{\tau} x \wedge \varphi \xrightarrow{\tau} y \Rightarrow x = y$$

*Beweis.* Wir nehmen an es existieren $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ und $x, y \in X$ mit $x \neq y$, $\varphi \xrightarrow{\tau} x$ und $\varphi \xrightarrow{\tau} y$. Nach Definition 3.2.8 gilt nun $\varphi \supseteq \underline{U}^\tau(x)$ und $\varphi \supseteq \underline{U}^\tau(y)$ und somit ist jedes $U_x \in \underline{U}^\tau(x)$ und $U_y \in \underline{U}^\tau(y)$ auch Element von $\varphi$. Nach Definition 3.2.1 gilt $U_x \cap U_y \in \varphi$ und somit auch $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, was aber bedeutet, dass jede Umgebung von $x$ einen nichtleeren Schnitt mit jeder Umgebung von $y$ hat. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Definition eines Hausdorff-Raumes. □

**3.4.3 Satz.** *Ist $(X, \tau)$ ein Hausdorff-Raum, so ist jede kompakte Teilmenge von $X$ abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei $A \subseteq X$ kompakt und $x \in X$ Berührungspunkt von $A$. Es existiert somit ein Filter $\varphi$, der $A$ enthält und gegen $x$ konvergiert. Wie in dem Beweis zu Satz 3.3.1 (ii $\Rightarrow$ iii) gezeigt, besitzt jeder Filter einen Oberfilter der zugleich ein Ultrafilter ist. Somit besitzt insbesondere $\varphi$ einen solchen *Oberultrafilter* $\psi$, der selbstverständlich ebenfalls $A$ enthält und gegen $x$ konvergiert. Da $A$ kompakt ist, muss $\psi$ nach Satz 3.3.1 gegen ein $a \in A$ konvergieren. Aus Satz 3.4.2 folgt, dass $a = x$ gilt, woraus folgt, dass $x$ Element von $A$ ist. Da $A$ somit alle seine Berührungspunkte enthält, ist $A$ abgeschlossen. □

## 3.5 Kompaktheit und stetige Funktionen

Nachdem wir nun die verschiedenen Definitionen von kompakten Mengen untersucht haben, beschäftigen wir uns jetzt mit einigen einfachen Eigenschaften kompakter Mengen im topologischen Raum und insbesondere mit stetigen Bildern kompakter Mengen.

**3.5.1 Definition.** Seien $(X, \tau)$ und $(Y, \upsilon)$ topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *stetig* genau dann, wenn gilt:

$$\forall O \in \upsilon : f^{-1}(O) \in \tau$$

Eine Funktion ist also stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.

**3.5.2 Satz.** *Seien $(X, \tau)$ und $(Y, \upsilon)$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Funktion. Ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X$ für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$, so ist $f$ stetig.*

*Beweis.* Sei $B \subseteq Y$ offen, dann ist $Y \backslash B$ abgeschlossen. Somit gilt nach Voraussetzung $f^{-1}(Y \backslash B)$ ist abgeschlossen in $X$ und somit ist $f^{-1}(B) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash B)$ offen, was die Stetigkeit von $f$ impliziert. □

**3.5.3 Satz.** *Seien $(X, \tau)$ und $(Y, \upsilon)$ topologische Räume, $(X, \tau)$ kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt.*

*Beweis.* Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung $f(X)$. Dann ist $(f^{-1}(O_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X$, die eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(O_i))_{i \in \{1,\dots,n\}}$ besitzt. Somit ist $(O_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$, woraus folgt, dass $f(X)$ kompakt ist. □

**3.5.4 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig bezüglich der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$. Dann nimmt $f$ auf $X$ ein Maximum und ein Minimum an.*

*Beweis.* Aus Satz 3.4.1 folgt, dass $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist. Satz 2.6.1 impliziert nun, dass $f(X)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund der Beschränktheit existieren Supremum und Infimum von $f(X)$, welche aufgrund der Abgeschlossenheit Elemente von $f(X)$ sind. □

**3.5.5 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \upsilon)$ ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist $f$ ein Homöomorphismus.*
*Hinweis: Der Begriff Homöomorphismus wird in [5] auf den Seiten 52-53 definiert.*

*Beweis.* Da $f$ nach Voraussetzung bereits bijektiv und stetig ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass $f^{-1}$ stetig ist. Nach Satz 3.5.2 genügt es zu zeigen, dass für jedes abgeschlossene $A \subseteq X$ das Urbild $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ wiederum abgeschlossen in $Y$ ist. Da $(X, \tau)$ kompakt ist, ist nach Satz 3.1.5 jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ ebenso kompakt. Satz 3.5.3 impliziert nun, dass $f(A)$ ebenfalls kompakt ist. Da $(Y, \upsilon)$ Hausdorff'sch ist, folgt mit Satz 3.4.3, dass $f(A)$ abgeschlossen ist. □

## 3.6 Relative Kompaktheit

Wir werden nun einen weiteren, abgeschwächten Kompaktheitsbegriff, nämlich die relative Kompaktheit, einführen und diese untersuchen.

**3.6.1 Definition.** (Relative Kompaktheit)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *relativ kompakt* in $(X, \tau)$ genau dann, wenn jede offene Überdeckung von $X$ eine endliche Teilüberdeckung von $A$ enthält.

**3.6.2 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.) $A$ ist relativ kompakt*

*ii.) Jeder Ultrafilter auf $A$ konvergiert gegen ein Element von $X$*

*Beweis.* i) ⇒ ii):
Sei $A \subseteq X$ relativ kompakt und $\varphi$ Ultrafilter auf $A$. Wir nehmen nun an $\varphi$ würde nicht gegen ein Element aus $X$ konvergieren. Dann gibt es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $O_x$ für die gilt:

$$O_x \in \dot{x} \cap \tau \wedge O_x \notin \varphi$$

Diese $O_x$ bilden offensichtlich eine offene Überdeckung von $X$, die nach Voraussetzung eine Teilüberdeckung $O_{x_1}, ..., O_{x_n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ von $A$ enthält. Da $A$ in $\varphi$ liegt, folgt aus $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$, dass $\bigcup_{i=1}^n O_{x_i} \in \varphi$ gilt. Mit Satz 3.2.10 folgt, dass eines der $O_{x_i}$ in $\varphi$ liegt, was aber im Widerspruch zu unserer Wahl der $O_x$ steht.

ii) ⇒ i):
Sei nun $A \subseteq X$ eine Teilmenge von $X$ derart, dass jeder Ultrafilter, der $A$ enthält, gegen ein Element von $X$ konvergiert. Weiter sei $(O_i)_{i \in I} \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von $X$. Wir nehmen nun an $(O_i)_{i \in I}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung von $A$. Dann ist

$$\mathcal{B} := \{A \backslash \bigcup_{i \in J} O_i \mid J \subseteq I, J \text{ endlich}\}$$

eine Filterbasis auf $A$ und es existiert ein Ultrafilter $\varphi$ auf $A$, der $\mathcal{B}$ umfasst. Nach Voraussetzung konvergiert $\varphi$ gegen ein $x \in X$, da jedoch auch $x$ von einem $O \in (O_i)_{i \in I}$ überdeckt wird, enthält $\mathcal{B} \subseteq \varphi$ die Menge $A \backslash O \subseteq X \backslash O$. Dies steht im Widerspruch zur Konvergenz von $\varphi$. □

Es ist nur logisch sich nun die Frage zu stellen, welche Eigenschaft einem relativ kompakten Teilraum eines topologischen Raumes zur Kompaktheit fehlt. Im Folgenden werden wir diese Frage beantworten.

**3.6.3 Definition.** (Schwach relative Vollständigkeit)
Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *schwach relativ vollständig* in $(X, \tau)$ genau dann, wenn jeder Filter auf $A$, der gegen ein Element von $X$ konvergiert, einen Oberfilter besitzt, der gegen ein Element von $A$ konvergiert.

**3.6.4 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

*i.) A ist kompakt*

*ii.) A ist relativ kompakt und schwach relativ vollständig*

*Beweis.* i) ⇒ ii):
Sei $A$ kompakt. Dann konvergiert nach Satz 3.3.1 jeder Ultrafilter auf $A$ gegen ein Element aus $A$ und da $A \subseteq X$ folgt mit Satz 3.6.2, dass $A$ relativ kompakt ist.
Nach Satz 3.3.1 besitzt jeder Filter auf $A$, also insbesondere auch die, die gegen ein $x \in X$ konvergieren, einen Oberfilter, der gegen ein Element von $A$ konvergiert. Dies impliziert die schwach relative Vollständigkeit von $A$.

ii) $\Rightarrow$ i):
Sei nun $A$ relativ kompakt und schwach relativ vollständig. Aus der relativen Kompaktheit folgt mit Satz 3.6.2, dass jeder Ultrafilter auf $A$ gegen ein Element aus $X$ konvergiert. Sei also $\varphi$ ein Ultrafilter auf $A$, der gegen ein $x \in X$ konvergiert. Da $\varphi$ keinen Oberfilter außer sich selbst besitzt, folgt mit der schwach relativen Vollständigkeit von $A$, dass $\varphi$ auch gegen ein $a \in A$ konvergiert. □

**3.6.5 Satz.** *Sei $(X, \tau)$ ein topologischer Raum. Endliche Vereinigungen kompakter Teilmengen von $X$ sind wiederum kompakt.*

*Beweis.* Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen von $X$ und $(O_i)_{i\in I}$ ein offene Überdeckung von $\bigcup_{i\in I} A_i$. Aus der Kompaktheit der Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ folgt mit Satz 3.6.4, deren relative Kompaktheit. Die Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ enthält somit für jedes $A_j$ mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine endliche Teilüberdeckung $(O_{A_j i})_{i\in\{1,\ldots,n_j\}}$ von $A_j$. Die Teilüberdeckung

$$\mathcal{O} := \{(O_{A_j i})_{i\in\{1,\ldots,n_j\}} \mid j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

überdeckt somit $\bigcup_{i\in I} A_i$, woraus die Kompaktheit von $\bigcup_{i\in I} A_i$ folgt. □

## 3.7 Kompaktifizierung

Zum Ende dieser Ausarbeitung möchten wir uns der Frage widmen, wie man durch möglichst geringe Modifikation aus einem beliebigen topologischen Raum einen kompakten topologischen Raum macht. Diesen Vorgang nennt man im allgemeinen *Kompaktifizierung*. Es gibt verschiedene Formen der Kompaktifizierung, jedoch werden wir uns in dieser Ausarbeitung auf die *Alexandroff-Kompaktifizierung* beschränken. Weitere Kompaktifizierungen, wie die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* und die *Wallman-Kompaktifizierung* kann man in [1] ab Seite 190 nachlesen.

**3.7.1 Definition.** (Offene Abbildung)
Seien $(X, \tau)$, $(Y, \upsilon)$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *offen* genau dann, wenn

$$\forall O \in \tau : f(O) \in \upsilon$$

gilt, also genau dann, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

**3.7.2 Definition.** (Kompaktifizierung)
Seien $(X, \tau)$, $(Y, \upsilon)$ topologische Räume, wobei $(Y, \upsilon)$ kompakt sei. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Kompaktifizierung* genau dann, wenn $f$ stetig, offen und injektiv ist.

Auf den vergangenen Seiten haben wir gezeigt, dass ein topologischer Raum $(X, \tau)$ genau dann kompakt ist, wenn jeder Ultrafilter auf $X$ gegen ein $x \in X$ konvergiert. Wir könnten nun ein Element zu unserem topologischen Raum derart hinzufügen, dass jeder Ultrafilter auf $X$ gegen dieses Element konvergiert.

Man kann sich bereits denken, dass man durch eine solche Kompaktifizierung den topologischen Raum stärker modifiziert als es unter Umständen nötig wäre. Es könnte nämlich sein, dass bereits einige Ultrafilter gegen ein $x \in X$ konvergieren. Diese zu modifizieren wäre also unnötig.
Aus diesem Grund ändert die *Alexandroff-Kompaktifizierung*, welche wir im folgenden einführen, nur das Konvergenzverhalten derer Ultrafilter, die nicht gegen ein $x \in X$ konvergieren.

**3.7.3 Definition.** (Alexandroff-Kompaktifizierung)
Sei $(X,\tau)$ ein topologischer Raum. Sei $\infty$ Element aus irgendeiner Obermenge von $X$, das nicht Element von $X$ ist. Weiter sei $X^* := X \cup \{\infty\}$ und

$$\tau^* := \tau \cup \{X^* \backslash A \mid A \subseteq X, A \text{ abgeschlossen und kompakt in } (X,\tau)\}.$$

Dann heißt $(X^*,\tau^*)$ die *Alexandroff'sche Einpunkt-Kompaktifizierung* von $(X,\tau)$.

**3.7.4 Satz.** *Sei $(X,\tau)$ ein topologischer Raum und $(X^*,\tau^*)$ die Alexandroff'sche Einpunkt-Kompaktifizierung von $(X,\tau)$. Dann ist $(X^*,\tau^*)$ ein kompakter topologischer Raum und es existiert eine Abbildung $f : X \to Y$ wie in Definition 3.7.2 gefordert.*

*Hinweis: Wir definieren für den folgenden Beweis zur Übersichtlichkeit:*

$$\mathcal{K} := \{A \subseteq X \mid A \textit{ abgeschlossen und kompakt in } (X,\tau)\}$$

*Somit gilt:* $\tau^* := \tau \cup \{X^* \backslash A \mid A \in \mathcal{K}\}$

*Beweis.* Wir überprüfen zunächst die Definition 3.1.1 eines topologischen Raumes:

i.)
Die leere Menge liegt offensichtlich in $\tau^*$, da sie bereits in $\tau$ liegt. Die Menge $X^*$ liegt ebenfalls in $\tau^*$, da $\emptyset \in \mathcal{K}$ gilt.

ii.)
Sei weiter $A, B \in \tau^*$. Gilt bereits $A, B \in \tau$, so gilt trivialerweise $A \cap B \in \tau^*$. Seien also $A, B \in \tau^* \backslash \tau$, dann existieren $A', B' \in \mathcal{K}$ mit $A = X^* \backslash A'$ und $B = X^* \backslash B'$. Somit gilt

$$A \cap B = (X^* \backslash A') \cap (X^* \backslash B') = X^* \backslash (A' \cup B'),$$

woraus $A \cap B \in \tau^*$ folgt, da $A' \cup B' \subseteq X$ abgeschlossen und nach Satz 3.6.5 kompakt ist.
Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \in \tau$ und $B \in \tau^* \backslash \tau$. Dann existiert wiederum ein $B' \in \mathcal{K}$ mit $B = X^* \backslash B'$. Somit gilt $B' = X^* \backslash B \in \mathcal{K}$, woraus folgt:

$$A \cap B = A \cap (X^* \backslash B') = A \backslash (X^* \backslash B) \in \tau \subset \tau^*$$

iii.)
Sei $(A_i)_{i\in I} \subseteq \tau^*$ eine Familie offener Mengen. Wir setzen nun $I_\tau = \{i \in I \mid A_i \in \tau\}$ und $A_\tau = \bigcup_{i\in I_\tau} A_i$ sowie $I_{\tau^*} = \{i \in I \mid A_i \in \tau^*\}$ und $A_{\tau^*} = \bigcup_{i\in I_{\tau^*}} A_i$. Gilt $I_{\tau^*} = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen, denn $A_\tau \in \tau \subset \tau^*$, da $\tau$ bereits eine Topologie ist.
Gelte also $I_{\tau^*} \neq \emptyset$. Dann gilt $A_i = X^*\backslash K_i$ mit $K_i \in \mathcal{K}$ für alle $i \in I_{\tau^*}$ und somit

$$A_{\tau^*} = \bigcup_{i\in I_{\tau^*}} (X^*\backslash K_i).$$

Nun folgt dass

$$A_{\tau^*} \cup A_\tau = \bigcup_{i\in I_{\tau^*}} (X^*\backslash K_i) \cup A_\tau = (X^*\backslash \bigcap_{i\in I_{\tau^*}} K_i) \cup A_\tau = X^*\backslash (\bigcap_{i\in I_{\tau^*}} K_i\backslash A_\tau)$$

gilt. Die Menge $\bigcap_{i\in I_{\tau^*}} K_i\backslash A_\tau$ ist abgeschlossen, da $A_\tau$ offen ist. Sei nun $j \in I_{\tau^*}$, dann ist offensichtlich $K_j$ kompakt und es gilt $K_j \supseteq \bigcap_{i\in I_{\tau^*}} K_i\backslash A_\tau$, woraus nach Satz 3.1.5 folgt, dass $\bigcap_{i\in I_{\tau^*}} K_i\backslash A_\tau$ kompakt ist und somit in $\mathcal{K}$ liegt. Es gilt also $A_\tau \cup A_{\tau^*} \in \tau^*$.
Somit ist $(X^*, \tau^*)$ ein topologischer Raum.

Sei nun $f : X \to X^*$ die kanonische Injektion mit $f(x) := x$.
Die Injektivität von $f$ ist trivial.
Dass $f$ offen ist, folgt sofort, da $f(O) = O$ für alle $O \in \tau$ und $\tau \subset \tau^*$ gilt.
Es bleibt somit noch die Stetigkeit zu zeigen. Für $O \in \tau$ gilt trivialerweise $f^{-1}(O) = O$. Sei also $O \in \tau^*\backslash\tau$, dann existiert ein $A \subset X$, welches abgeschlossen in $(X,\tau)$ ist und für das $O = X^*\backslash A$ gilt. Folglich gilt dann

$$f^{-1}(O) = X \cap (X^*\backslash A) = X\backslash A \in \tau.$$

Da alle Elemente aus $\tau$ und $\tau^*$ per Definition offen sind, ist f stetig.

Nun bleibt nur noch die Kompaktheit von $(X^*, \tau^*)$ zu zeigen. Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von $X^*$. Dann existiert ein $O_0 \in (O_i)_{i\in I}$ mit $\infty \in O_0$. Das Komplement $K = X^*\backslash O_0$ ist nach Definition von $\tau^*$ eine kompakte Teilmenge von $X$, weshalb eine endliche Teilüberdeckung $O_1, ..., O_n$ von $K$ existiert. Somit ist $O_0, O_1, ..., O_n$ eine endliche Teilüberdeckung von $X^*$, woraus folgt, dass $(X^*, \tau^*)$ kompakt ist. □

Die Alexandroff'sche Einpunkt-Kompaktifizierung ist also in der Tat eine Kompaktifizierung, wie wir sie in Definition 3.7.2 definiert haben.

# Literaturverzeichnis


[1] R. Bartsch. *Allgemeine Topologie I*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 1. edition, 2007.

[2] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1. edition, 1966.

[3] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, revised and completed edition edition, 1989.

[4] K. Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 8. edition, 2005.

[5] G. Preuß. *Allgemeine Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 2. edition, 1975.

[6] J. Cigler/H.-C. Reichel. *Topologie - Eine Grundvorlesung*. Bibliographisches Institut Wien, Wien, 2. edition, 1987.