Hyperräume

05.03.2013

Daniel Hasler
Thomas Eiter

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik,
Technische Universität Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wir wollen uns im Folgenden mit der Frage beschäftigen, wie sich die Metrik einer Grundmenge X auf eine Menge ihrer Teilmengen übertragen lässt.

Wir gehen dabei zunächst von einem Metrischen Raum (X, d) aus und versuchen eine Metrik zu konstruieren, welche auf einer Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$, die wir als Hyperraum bezeichnen, definiert ist. Dabei sollen beispielsweise für $x, y \in X$ die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ den gleichen Abstand voneinander haben wie die Elemente x und y in (X, d). Die weiteren Überlegungen hierzu werden uns dann schließlich auf die Hausdorff-Metrik führen, die auf den kompakten Teilmengen von X eine passende Metrik darstellen wird.

Im Weiteren werden wir den Begriff der offenen Mengen bezüglich der Hausdorff-Metrik einführen, sodass wir Kompaktheit im Hyperraum definieren können. Diese wird uns dann Vollständigkeit und somit die Existenz von Grenzobjekten einer Folge im Hyperraum garantieren.

Als anschauliche Beispiele für solche Grenzobjekte im Hyperraum betrachten wir dann die Koch-Kurve und den Cantor-Staub. Erst durch die vorigen theoretischen Überlegungen kann die Existenz dieser Objekte überhaupt garantiert werden.

Und nun ’ran an den Speck!

2 Die Hausdorff-Metrik

Wir betrachten nun einen metrischen Raum (X,d). Um nun einen Abstandsbegriff auf Teilmengen von X zu konstruieren, können wir uns zunächst überlegen, wie wir den Abstand zwischen Punkten und Teilmengen von X erfassen würden. Dabei ist die folgende Definition intuitiv.

Definition 1. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ definieren wir

$$d_A : X \to \mathbb{R}, d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x,a).$$

Die Funktion d_A heißt Abstandsfunktion zur Menge A und wir nennen $d_A(x)$ den Abstand vom Punkt x zur Menge A.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Funktion d_A stetig ist.

Satz 2. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ ist d_A Lipschitz-stetig.*

Beweis. Seien $y,z \in X$. Nach Definition von d_A existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $d_A(x) \geq d(a,z) - \varepsilon$. Es gilt außerdem $d_A(y) \leq d(a,y)$. Damit erhalten wir

$$d_A(y) - d_A(z) \leq d(a,y) - (d(a,z) - \varepsilon) = d(a,y) - d(a,z) + \varepsilon.$$

Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir $d(a,y) - d(a,z) \leq d(z,y)$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ folgt

$$d_A(y) - d_A(z) \leq d(z,y) + \varepsilon.$$

Vertauschen wir y und z, so erhalten wir analog $d_A(z) - d_A(y) \leq d(y,z) + \varepsilon$, woraus mit der Symmetrie der Metrik

$$|d_A(y) - d_A(z)| \leq d(y,z) + \varepsilon$$

folgt. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist d_A Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. □

Korollar 3. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ abgeschlossen und $K \subseteq X$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$, gilt $\min_{k \in K} d_A(k) > 0$.*

Beweis. Nach Satz 2 ist d_A stetig, nimmt also auf der kompakten Menge K das Minimum an. Nach Definition ist $\min_{k \in K} d_A(k) \geq 0$. Angenommen, $\min_{k \in K} d_A(k) = 0$. Dann existiert ein $k_0 \in K$ mit $0 = d_A(k_0) = \inf_{a \in A} d(a,k_0)$. Aufgrund der Eigenschaften des Infimums existiert dann eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $\lim_{n \to \infty} d(a_n,k_0) = 0$. Da A abgeschlossen ist, gilt damit auch $k_0 \in A$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $A \cap K = \emptyset$. Also ist $\min_{k \in K} d_A(k) > 0$. □

Wenn wir die diese Definition auf Einpunktmengen übertragen wollen, dann erkennen wir für Elemente $x, y \in A$ jedoch erste Probleme, da dann offenbar $d_A(x) = d_A(y) = 0$ gilt, sodass im Allgemeinen die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist. Ebenso ist dann die Definitheit nicht gegeben, da A und $\{x\}$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{P}(X)$ sind, aber $d_A(x) = 0$. Wir können aber auf diesen Ansatz aufbauen.

Wir können diese Idee auf den Abstandbegriff zweier Teilmengen A und B eines metrischen Raums (X, d) erweitern, indem wir als Abstand von A zu B den Abstand des von B am weitesten entfernten Punktes aus A gemäß d_B bezeichnen. Dies liefert für $A \subset B$ jedoch immer noch den Abstand Null. Um uns hier zu behelfen, können wir den Abstand zwischen A und B als Maximum der Abstände von A zu B und von B zu A definieren, was uns auf jeden Fall Symmetrie garantiert. Da wir für $A \neq B$ mit $\overline{A} = B$ aber immer noch den Abstand Null erhalten, haben wir keine Definitheit vorliegen. Deshalb beschränken wir uns im Folgenden auf die kompakten Teilmengen des metrischen Raums, da dann auch die Existenz eines am weitesten entfernten Punktes garantiert ist, da d_A nach Satz 2 stetig ist. Angestoßen durch unsere Überlegungen können wir nun folgende Definition durchführen.

Definition 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U(A, \varepsilon) := \bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a) = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(a, x) < \varepsilon\}$$

ε-Umgebung bezüglich d von A.

Mit Hilfe des folgenden Satzes kommen wir unserer gesuchten Metrik schon wesentlich näher.

Satz 5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $\mathfrak{K}(X)$ die Menge der nichtleeren kompakten Teilmengen von X. Sei*

$$\Delta_d : \mathfrak{K}(X) \times \mathfrak{K}(X) \to \mathbb{R}, \Delta_d(A, B) := \inf\{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0, U(A, \varepsilon) \supseteq B\}.$$

Dann gelten für $A, B, C \in \mathfrak{K}(X)$ folgende Eigenschaften:

1. $\Delta_d(A, C) \leq \Delta_d(A, B) + \Delta_d(B, C)$
2. $\Delta_d(A, B) = \sup_{b \in B} d_A(b)$.

Beweis. Die Funktion Δ_d ist wohldefiniert, da $\{\varepsilon \in \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0, U(A, \varepsilon) \supseteq B\}$ nach unten durch Null beschränkt ist. Damit existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Infimum, da die Menge nicht leer ist, was aus der Beschränktheit von B folgt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Definition von Δ_d gilt $U(A, \Delta_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}) \supseteq B$ und $U(B, \Delta_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}) \supseteq C$. Damit gilt natürlich auch $U(U(A, \Delta_d(A, B) + \frac{\varepsilon}{2}), \Delta_d(B, C) + \frac{\varepsilon}{2}) = U(A, \Delta_d(A, B) + \Delta_d(B, C) + \varepsilon) \supseteq C$. Dies liefert uns $\Delta_d(A, C) \leq \Delta_d(A, B) + \Delta_d(B, C) + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, woraus $\Delta_d(A, C) \leq \Delta_d(A, B) + \Delta_d(B, C)$ folgt. Damit ist 1. gezeigt.

Wir wählen nun $\varepsilon = \sup_{b \in B} d_A(b)$. Dann gilt $U(A, \varepsilon) \supseteq B$. Dies folgt daraus, dass für $b \in B$ gilt: $d_A(b) = \inf_{a \in A} d(b, a) < \varepsilon$. Durch die Eigenschaft des Infimums folgt die Existenz eines $x \in A$, für das $\inf_{a \in A} d(b, a) \leq d(b, x) < \varepsilon$. Damit ist auch $b \in U(A, \varepsilon)$. Damit gilt also $\Delta_d(A, B) \leq \sup_{b \in B} d_A(b)$.

Angenommen, es gelte $\Delta_d(A, B) < \sup_{b \in B} d_A(b)$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \sup_{b \in B} d_A(b)$ und $U(A, \varepsilon) \supseteq B$, d.h. für alle $b \in B$ existiert ein $a \in A$, sodass $d(a, b) < \varepsilon$. Damit ist $d_A(b) < \varepsilon$ für alle $b \in B$ und damit $\sup_{b \in B} d_A(b) \leq \varepsilon$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Also gilt $\Delta_d(A, B) = \sup_{b \in B} d_A(b)$ und 2. ist gezeigt. □

Nun können wir endlich die gewünschte Metrik einführen.

Satz 6. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $\mathfrak{K}(X)$ die Menge der nichtleeren kompakten Teilmengen von X. Sei Δ_d definiert wie oben. Dann ist durch*

$$\mathfrak{h} : \mathfrak{K}(X) \times \mathfrak{K}(X) \to \mathbb{R} : \mathfrak{h}(A,B) := \max\{\Delta_d(A,B), \Delta_d(B,A)\}$$

eine Metrik auf $\mathfrak{K}(X)$ definiert. Diese nennen wir die Hausdorff-Metrik zu d.

Beweis. Die Symmetrieeigenschaft folgt direkt aus der Definition, da die Maximumsbildung symmetrisch ist.

Nun überprüfen wir die Definitheit. Sei zunächst $A \in \mathfrak{K}(X)$. Dann gilt mit Satz 5: $\mathfrak{h}(A,A) = \max\{\Delta_d(A,A), \Delta_d(A,A)\} = \Delta_d(A,A) = \sup_{a\in A} d_A(a) = 0$. Sei nun $\mathfrak{h}(A,B) = 0$ für $A, B \in \mathfrak{K}(X)$. Damit folgt für alle $a \in A$, dass $d_B(a) = \inf_{b\in B} d(a,b) = \inf_{b\in B} d_{\{a\}}(b) = 0$. Nun nutzen wir aus, dass $d_{\{a\}}$ stetig auf B ist, nach Satz 2 und dass B eine kompakte Menge ist. Damit wird das Infimum als Minimum realisiert und es existiert ein $b \in B$ mit $d_{\{a\}}(b) = d(a,b) = 0$. Damit folgt, dass $b = a$ gilt, da wir mit d eine Metrik gegeben haben. Damit ist $a \in B$, sodass $A \subseteq B$ folgt. Wegen der Symmetrie folgt gleichzeitig auch, dass $B \subseteq A$. Somit erhalten wir $A = B$ und damit ist Definitheit gezeigt.

Nun bleibt uns nur noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Hierzu benutzen wir wiederum unsere Erkenntnisse aus Satz 5. Es ergibt sich folgende Ungleichung für $A, B, C \in \mathfrak{K}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}(A,C) = \max\{\Delta_d(A,C), \Delta_d(C,A)\} &\leq \max\{\Delta_d(A,B) + \Delta_d(B,C), \Delta_d(C,B) + \Delta_d(B,A)\} \\ &\leq \max\{\Delta_d(A,B), \Delta_d(B,A)\} + \max\{\Delta(B,C), \Delta_d(C,B)\} = \mathfrak{h}(A,B) + \mathfrak{h}(B,C).\end{aligned}$$

□

3 Offene Mengen und Kompaktheit im Hyperraum

Wir versuchen nun, die offenen Mengen im Hyperraum zu charakterisieren. Wir betrachten wieder einen metrischen Raum (X,d) und eine offene ε-Umgebung einer Menge $A \in \mathfrak{K}(X)$ bezüglich der induzierten Hausdorff-Metrik $\mathfrak{h}$. Ein Element B dieser Umgebung muss dann in $U(A,\varepsilon)$ enthalten sein, darf also die abgeschlossene Menge $X \setminus U(A,\varepsilon)$ nicht schneiden.

Betrachten wir die offenen $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebungen der Punkte von A, so bilden diese eine offene Überdeckung von A. Wegen der Kompaktheit existiert eine endliche Teilüberdeckung. Für B gilt nun $U(B,\varepsilon) \supseteq A$, wenn in jeder $\frac{\varepsilon}{2}$-Umgebungen, die die endliche Überdeckung bilden, ein Element von B enthalten ist.

Ausgehend von diesen Überlegungen definieren wir:

Definition 7. Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ deren Potenzmenge. Für $A \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ heißt

- $$A^{-\mathfrak{M}} := \{M \in \mathfrak{M} | M \cap A \neq \emptyset\}$$

  Treffermenge („hit-set“) von A bezüglich $\mathfrak{M}$,

- $$A^{+\mathfrak{M}} := \{M \in \mathfrak{M} | M \cap A = \emptyset\}$$

  Fehlmenge („miss-set“) von A bezüglich $\mathfrak{M}$.

Im Folgenden betrachten wir nun die Menge

$$\mathscr{S} := \{A^{+\mathfrak{K}(X)} | A \text{ abgeschlossen in } X\} \cup \{O^{-\mathfrak{K}(X)} | O \text{ offen in } X\}.$$

Lemma 8. *Die Elemente von $\mathscr{S}$ sind offen in $\mathfrak{K}(X)$ bezüglich der Hausdorff-Metrik $\mathfrak{h}$.*

Beweis. Sei $M \in \mathscr{S}$. Wir betrachten zwei Fälle.

1. Sei $M \in \{A^{+\mathfrak{K}(X)} | A \text{ abgeschlossen in } X\}$. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ mit $M = A^{+\mathfrak{K}(X)}$. Nach Korollar 3 können wir $\varepsilon := \min_{k \in K} d_A(k) > 0$ wählen. Wir wählen $K \in M$ sowie $B \in U_\varepsilon(K) := \{M \in \mathfrak{K}(X) | \mathfrak{h}(K,M) < \varepsilon\}$ aus der ε-Umgebung von K (bezüglich $\mathfrak{h}$). Dann gilt also $\mathfrak{h}(K,B) < \varepsilon$.

   Angenommen, $A \cap B \neq \emptyset$. Dann existiert $x \in A \cap B$, für welches

   $$d_K(x) \leq \sup_{b \in B} d_K(b) \leq \max\left\{\sup_{k \in K} d_B(k), \sup_{b \in B} d_K(b)\right\} = \mathfrak{h}(K,B)$$

sowie

$$d_K(x) = \inf_{k\in K} d(k,x) \geq \inf_{k\in K}\inf_{a\in A} d(k,a) = \min_{k\in K} d_A(k) = \varepsilon > \mathfrak{h}(K,B)$$

gilt. Zusammenfassend erhalten wir also $\mathfrak{h}(K,B) < d_K(x) \leq \mathfrak{h}(K,B)$ und somit einen Widerspruch. Also gilt $A\cap B = \emptyset$ und damit auch $B \in M$. Da B beliebig war, gilt also $U_\varepsilon(K) \subseteq M$ und somit ist M Umgebung all seiner Elemente, also offen.

2. Sei $M \in \{O^{-\mathfrak{K}(X)} | O \text{ offen in } X\}$, d.h. es existiert eine offene Menge $O \in X$ mit $M = O^{-\mathfrak{K}(X)}$. Wir wählen nun ein $K \in M$, also gilt $O\cap K \neq \emptyset$. Somit existiert ein $x_0 \in O\cap K$. Da O offen ist, finden wir ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq O$. Wir wählen nun $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$. Sei nun $B \in U_\varepsilon(K)$, d.h. $\mathfrak{h}(B,K) < \varepsilon$. Damit gilt insbesondere $\inf\{\alpha \in \mathbb{R} | \alpha > 0, U(B,\alpha) \supseteq K\} < \varepsilon$ und somit $K \subseteq U(B,\varepsilon)$. Folglich existiert für alle $x\in K$ ein $b \in B$ mit $d(x,b) < \varepsilon$. Also existiert auch für x_0 ein $b\in B$ mit $d(x_0,b) < \varepsilon = \frac{\delta}{2} < \delta$. Deshalb folgt nun $b \in U_\delta(x_0)$ und auch $b\in O$. Also ist $B\cap O \neq \emptyset$ und hiermit $B \in M$. Schließlich gilt $U_\varepsilon(K) \subseteq M$ und somit ist M offen bezüglich $\mathfrak{h}$.

□

Lemma 9. *Sei $M \in \mathfrak{K}(X)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele Elemente von $\mathscr{S}$ derart, dass ihr Durchschnitt M enthält und ganz innerhalb der ε-Umgebung von M bezüglich $\mathfrak{h}$ liegt.*

Beweis. Sei $K \in U_\varepsilon(M)$. Nach Definition von $\mathfrak{h}$ ist dies äquivalent zu $K \subseteq U(M,\varepsilon)$ und $M \subseteq U(K,\varepsilon)$. Nach Definition ist $U(M,\varepsilon)$ eine offene Menge in X, also ist $X\setminus U(M,\varepsilon)$ abgeschlossen. Damit ist $K \subseteq U(M,\varepsilon)$ genau dann, wenn K einen leeren Schnitt mit dem Komplement hat, also wenn $K \in (X\setminus U(M,\varepsilon))^+$ gilt, wobei $(X\setminus U(M,\varepsilon))^+ \in \mathscr{S}$.

Offenbar gilt $M \subseteq \bigcup_{x\in M} U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Da M kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung und somit auch $x_1,\dots,x_n$ mit $M \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Wählen wir nun $K \in \bigcap_{i=1}^n (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i))^-$. Dann gilt $K \cap U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i) \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, d.h. dass für alle $i\in\{1,\dots,n\}$ ein $k \in K$ existiert, sodass $d(k,x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $m \in M$ beliebig. Dann existiert ein $i \in \{1,\dots,n\}$, sodass $m \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Nun wählen wir ein $k \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)\cap K$, womit aufgrund der Dreiecksungleichung gilt:

$$d(m,k) \leq d(m,x_i) + d(x_i,k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist $M \subseteq U(K,\varepsilon)$.

Zusammenfassend gilt also $(X\setminus U(M,\varepsilon))^+ \cap \bigcap_{i=1}^n (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i))^- \subseteq U_\varepsilon(M)$. Damit haben wir einen solchen endlichen Durchschnitt gefunden, da insbesondere auch $M \in (X\setminus U(M,\varepsilon))^+ \cap \bigcap_{i=1}^n (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i))^-$ gilt. □

Satz 10. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist $\mathscr{S}$ eine Subbasis der offenen Mengen von $(\mathfrak{K}(X),\mathfrak{h})$, d.h. $O \subseteq \mathfrak{K}(X)$ ist genau dann offen, wenn O sich als Vereinigung endlicher Schnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$ schreiben lässt.*

Beweis. Wir betrachten ein $M \in O$. Dann können wir ein $\varepsilon > 0$ wählen, sodass $U_\varepsilon(M) \subseteq O$. Nach Lemma 9 existieren dann $S_1,\dots,S_n \in \mathscr{S}$, sodass $M \in \bigcap_{i=1}^n S_i =: D_M \subseteq O$. Da dies für beliebiges $M \in O$ gilt, ist auch $O = \bigcup_{M\in O} M \subseteq \bigcup_{M\in O} D_M \subseteq O$ und somit $O = \bigcup_{M\in O} D_M$.

Damit lässt sich O darstellen als beliebige Vereinigung endlicher Durchschnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$.

Da die Elemente von $\mathscr{S}$ nach Lemma 8 offen sind, sind auch die Vereinigungen endlicher Schnitte von Elementen aus $\mathscr{S}$ offen. Folglich ist $\mathscr{S}$ eine Subbasis der offenen Mengen. □

Da wir nun die offenen Mengen bezüglich $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{K}(X)$ charaktisiert haben, können wir nun auch Kompaktheit eines metrischen Hyperraums $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$ beschreiben. Hierfür benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 11. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$ der induzierte Hyperraum. Seien $G_i \in X, i \in I$ offen für eine beliebige Indexmenge I und $K \in X$ beliebig. Dann gilt folgende Äquivalenz.*

$$\bigcup_{i \in I} G_i \supseteq K \Longleftrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i^{-\mathfrak{K}(X)} \supseteq K^{-\mathfrak{K}(X)}.$$

Beweis. Sei zunächst $\bigcup_{i \in I} G_i \supseteq K$. Wir wählen nun $A \in K^-$, d.h. $A \cap K \neq \emptyset$. Also gilt auch $A \cap \bigcup_{i \in I} G_i \neq \emptyset$. Damit existiert ein $i_0 \in I$ mit $A \cap G_{i_0} \neq \emptyset$. Folglich gilt $A \in G_{i_0}^-$ und damit letzlich auch $A \in \bigcup_{i \in I} G_i^-$. Somit erhalten wir $K^- \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i^-$.

Sei nun $\bigcup_{i \in I} G_i^- \supseteq K^-$. Wir nehmen an, dass $K \not\subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ sei. Dann gilt $X \setminus \bigcup_{i \in I} G_i \supseteq K \setminus \bigcup_{i \in I} G_i \neq \emptyset$. Also finden wir ein $A \in \mathfrak{K}(X)$ mit $A \subseteq X \setminus \bigcup_{i \in I} G_i$ und $A \cap \left(K \setminus \bigcup_{i \in I} G_i\right) \neq \emptyset$. Es gilt dann insbesondere $A \in K^-$, womit nach Voraussetzung auch $A \in \bigcup_{i \in I} G_i^-$ gilt. Also existiert ein $i_0 \in I$, sodass $A \cap G_{i_0} \neq \emptyset$ ist, was im Widerspruch zur Konstruktion von A steht. Also gilt $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. □

Für den Beweis des zentralen Satzes dieses Kapitels benötigen wir den Alexandersches Subbasissatz, für dessen Beweis wir auf Vortrag Nummer 7 verweisen.

Alexanderscher Subbasissatz 12. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathscr{S}$ eine Subbasis der offenen Mengen bezüglich d. Dann ist (X, d) genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung von X mit Elementen aus $\mathscr{S}$ eine endliche Teilüberdeckung beinhaltet.*

Nun kommen wir zum angekündigten zentralen Satz dieses Kapitels.

Satz 13. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Dann ist der induzierte metrische Hyperraum $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$ kompakt.*

Beweis. Sei U eine Überdeckung von $\mathfrak{K}(X)$ aus Elementen $A_i^+, i \in I$ sowie $O_j^-, j \in J$, wobei I, J beliebige Indexmengen sowie A_i kompakt und O_j offen sind. Damit sind A_i^+ und O_j^- Elemente aus der Subbasis $\mathscr{S}$. Dann ist $K := X \setminus \bigcup_{j \in J} O_j$ abgeschlossen und somit kompakt.

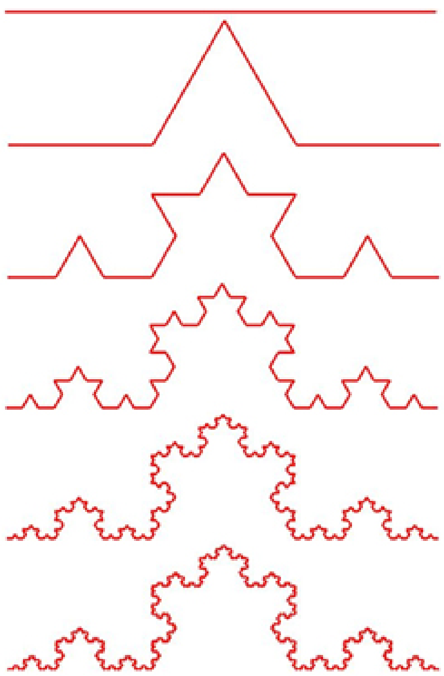
Es gilt also $K \in \mathfrak{K}(X)$, falls $K \neq \emptyset$. Damit gilt nach Konstruktion $K \notin O_j^-$ für jedes $j \in J$. Damit existiert ein $A_0^+ \in U$ mit $K \in A_0^+$. Nach der Konstruktion von K gilt damit auch $A_0 \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$. Da A_0 kompakt ist, existieren $O_1, ...O_n \in U$ mit $A_0 \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_k$. Dann ist $\{A_0^+, O_1^-, ..., O_n^-\}$ eine endliche offene Überdeckung von $\mathfrak{K}(X)$. Mit dem Alexanderschen Subbasissatz folgt nun die Kompaktheit von $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$.

Falls $K = \emptyset$, dann gilt $X = \bigcup_{j \in J} O_j$. Da X kompakt ist, existieren endlich viele $O_1^-, ..., O_n^- \in U$ mit $X = \bigcup_{k=1}^n O_k$. Nach Satz 11 gilt damit $\bigcup_{k=1}^n O_k^- = X^- = \mathfrak{K}(X)$. Also ist $\mathfrak{K}(X)$ kompakt. □

4 Die Koch-Kurve

In diesem Abschnitt behandeln wir ein Beispiel, anhand dessen wir unsere bisherigen Ergebnisse benutzen können, die sogenannte Koch-Kurve.

Wir wählen zunächst unseren Grundraum als einen abgeschlossenen Kreis im $\mathbb{R}^2$, beispielsweise $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 6\}$. Wir betrachten nun zunächst die Strecke $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \times \{0\} \subseteq X$. Im ersten Schritt errichten wir über dem mittleren Drittel der Strecke ein gleichseitiges Dreieck und entfernen die Grundseite. Im zweiten Schritt dritteln wir jede der enstandenen Strecken und bilden wieder ein gleichseitiges Dreieck über das mittlere Drittel, dessen Grundseite wir entfernen. Mit diesem Verfahren können wir nun fortfahren. Graphisch dargestellt erhalten wir die folgenden ersten fünf Objekte:



Fahren wir nun mit diesem Verfahren fort, stellt sich die Frage, ob unsere Iteration konvergiert. Um dies zu beantworten, müssen wir unser Verfahren mathematisch darstellen.

Wählen wir d als die euklidische Metrik, so ist (X,d) ein kompakter metrischer Raum. Nach Satz 13 ist somit auch der implizierte metrische Hyperraum $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$ kompakt und damit vollständig.

Wir betrachten nun die folgenden vier Abbildungen $f_i : X \to X$ für $i \in \{1,2,3,4\}$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
f_2(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} x\right) + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
f_3(x) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} x\right) + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\
f_4(x) &= \frac{1}{3}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diese Abbildungen stellen strikte Kontraktionen dar, was wir nun zeigen werden. Für f_1 gilt für beliebiges $x, y \in \mathfrak{K}(X)$

$$d(f_1(x), f_1(y)) = \left\|f_1(x) - f_1(y)\right\|_2 = \left\|\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y\right\|_2 = \frac{1}{3}\left\|x - y\right\|_2 = \frac{1}{3}d(x,y)$$

Damit ist f_1 eine strikte Kontraktion. Analog zeigt man dies auch für f_4. Durch gleiches Vorgehen folgt für f_2

$$\begin{aligned}
d(f_2(x), f_2(y)) = \left\|f_2(x) - f_2(y)\right\|_2 &= \left\|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} y\right\|_2 \\
&= \frac{1}{3}\left\|\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}(x-y)\right\|_2 \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{\left((x-y)^T\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\right)^T \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}(x-y)\right)} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x-y)^T \cdot (x-y)} \\
&= \frac{1}{3}\left\|x-y\right\|_2 = \frac{1}{3}d(x,y).
\end{aligned}$$

Analoges gilt für f_3. Also sind f_2 und f_3 ebenfalls strikte Kontraktionen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion $F : \mathfrak{K}(X) \to \mathfrak{K}(X)$, definiert durch

$$F(K) := \bigcup_{i=1}^{4} f_i(K),$$

ebenfalls eine strikte Kontraktion ist. Dies liefert uns der folgende Satz.

Satz 14. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Seien $f_1, \dots, f_n : X \to X$ eine Familie strikter Kontraktionen.*

Dann ist die Funktion $F : \mathfrak{K}(X) \to \mathfrak{K}(X)$ mit

$$F(K) := \bigcup_{i=1}^{n} f_i(K)$$

ebenfalls eine strikte Kontraktion.

Beweis. Da $f_1, \ldots, f_n$ strikte Kontraktionen sind, existieren $q_1, \ldots, q_n$ mit $q_i < 1$ und $d(f_i(x), f_i(y)) < q_i \cdot d(x, y)$ für $i \in \{1, \ldots n\}$ und $x, y \in X$. Wir setzen $q := \max\{q_1, \ldots, q_n\}$. Seien $\varepsilon > 0$ und $A, B \in \mathfrak{K}(X)$ beliebig. Sei $x \in \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$. Dann existiert ein $l \in \{1, \ldots n\}$ und ein $a \in A$ mit $f_l(a) = x$. Weiter existiert ein $b \in B$ mit $d(a, b) < d_B(a) + \varepsilon$. Wir setzen $y := f_l(b)$. Dann erhalten wir

$$d(x, y) = d(f_l(a), f_l(b)) \leq q \cdot d(a, b) < q \cdot d_B(a) + q\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, erhalten wir somit

$$d_{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}(x) \leq d(x, y) \leq q \cdot d_B(a) \leq q \cdot \sup_{a \in A} d_B(a),$$

woraus wegen der Beliebigkeit von x

$$\sup_{x \in \bigcup_{i=1}^n f_i(A)} d_{\bigcup_{i=1}^n f_i(B)}(x) \leq q \cdot \sup_{a \in A} d_B(a),$$

folgt. Aus Symmetriegründen folgt mit Satz 5 nun

$$\mathfrak{h}(F(A), F(B)) \leq q \cdot \mathfrak{h}(A, B).$$

Damit ist F ebenfalls eine strikte Kontraktion und die Behauptung ist bewiesen. □

Da F also eine strikte Kontraktion und Selbstabbildung und $(\mathfrak{K}(X), \mathfrak{h})$ vollständig ist, ist die Existenz eines eindeutig bestimmten Grenzobjektes κ unserer Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$ durch den Banachschen Fixpunktsatz garantiert. Für dieses Grenzobjekt κ gilt also $F(\kappa) = \kappa$, was man auch als Selbstähnlichkeit bezeichnet. Dieses kompakte Grenzobjekt wird die Kochkurve genannt.

Allgemein werden solche selbstähnliche Mengen auch als Fraktale bezeichnet.

Da sich die Länge der Kurve bei jedem Iterationsschritt um den Faktor $\frac{4}{3}$ vergrößert. Da unsere Anfangsstrecke die Länge 3 hat, erhalten wir nach dem n-ten Iterationsschritt eine Länge von $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Die Länge divergiert also für $n \to \infty$. Damit ist die Koch-Kurve unendlich lang, die Fläche unter der Kurve ist hingegen endlich.

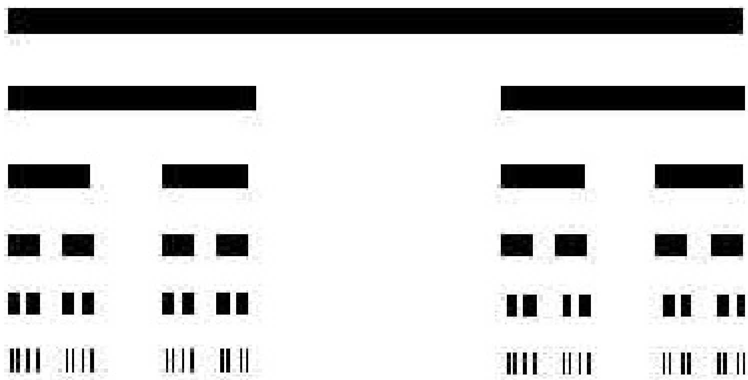
Und nun zu einem weiteren Beispiel solcher Fraktale.

5 Der Cantor-Staub

In diesem Kapitel behandeln wir den sogannten Cantor-Staub, auch bekannt als Cantorsches Diskontinuum. Diese Menge gilt als das frühste bekannte Fraktal. Für die Konstruktion betrachten wir das reelle Intervall $C_0 := [0,1]$. Nun entfernen wir das mittlere offene Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ und erhalten somit die Menge $C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Im nächsten Schritt entfernen wir aus den eben erhaltenen Mengen wieder jeweils das mittlere offene Drittel, sodass wir $C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ erhalten. Fahren wir analog fort, ergibt sich die Iterationsformel

$$C_n := \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right),$$

wobei die Addition und die Division punktweise zu verstehen sind.



Um hier wiederum Satz 14 anzuwenden, betrachten wir die folgenden beiden Abbildungen $f, g : [0,1] \to [0,1]$ mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$$
$$g(x) = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$$

Diese stellen offenbar strikte Kontraktion dar. Mit $X := [0,1]$ ist nach Satz 14 damit auch die Funktion $F : \mathfrak{K}(X) \to \mathfrak{K}(X)$ mit

$$F(K) := f(K) \cup g(K)$$

eine strikte Kontraktion bezüglich $\mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{K}(X)$ kompakt und somit vollständig ist, folgt nach dem Banachschen Fixpunktsatz analog zu oben die Existenz eines kompakten Grenzobjektes C, sodass $F(C) = C$ gilt. Dies ist folglich ein Fraktal und besitzt einige weitere interessante Eigenschaften, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen.

Literaturverzeichnis

[1] Barnsley, Michael F.: *Fractals Everywhere*. 3. Aufl. 2012. – S. 29–41

[2] Bartsch, René: *Allgemeine Topologie I* . Oldenbourg, 2007

[3] Bartsch, René: *Allgemeine Topologie II (Vorlesungsskript)*. Rostock, 2007. – S. 166–170

[4] Evers, Karsten: *Mengentheoretische Topologie*. 2011. – S. 166–170

[5] hansibal: *Die Cantor-Menge*. http://matheplanet.com/index.html, 2004 (Eingesehen am 04.03.2013)

[6] Rössler, Florian: *Die Cantor-Menge*. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2009