Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension

Jens Krüger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 2

2 Grundlagen aus der Maßtheorie 3

3 Die Konstruktion des Hausdorff-Maßes 4

4 Eigenschaften des Hausdorff-Maßes und Hausdorff-Dimension 6

5 Bestimmung von Hausdorff-Dimensionen 8

6 Literaturverzeichnis 11

1 Einleitung

Zu Anfang dieser kurzen Ausarbeitung über das Hausdorff-Maß soll zunächst einmal geklärt werden, welche besondere Bedeutung diesem Maß zukommt. Maße sind Abbildungen aus einer Menge von Mengen in die reellen Zahlen, sie ordnen jeder Menge aus ihrem Urbild eine Zahl zu, die als Inhalt der Menge angesehen werden kann, und zum Vergleich der Mengen dient. Das Hausdorff-Maß bildet auch Mengen auf reelle Zahlen ab, das interessante am Hausdorff-Maß ist jedoch, dass während der Abbildung auf den Inhalt einer Menge eine zweite charakteristische Größe der Menge produziert wird. Die so genannte Hausdorff-Dimension. Diese ist für Mengen auf dem $\mathbb{R}^n$ gleich n, aber für Fraktale oft keine ganze Zahl mehr. Das Hausdorff-Maß schafft also eine Vergleichsgröße für Mengen, die sich meistens einem sinnvollen Vergleich über einen Inhalt entziehen.

2 Grundlagen aus der Maßtheorie

Für die Konstruktion des Hausdorff-Maßes und allgemein für das Thema Maße sind ein paar Grundlagen aus der Maßtheorie notwendig. Um uns einen möglichst einfachen Umgang mit dem Hausdorff-Maß zu erlauben werden wir das Maß etwas anders definieren, als es in der Maßtheorie normalerweise üblich ist.

Definition 2.1. (**σ-Algebra**) Sei Ω eine Menge. $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls gilt:

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \implies A^C \in \mathscr{A}$

(iii) Für jede abzählbare Familie $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathscr{A}$ gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$$

Bemerkung 2.2. Sei $M \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\mathscr{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $M \subseteq \mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ heißt die von M erzeugte σ-Algebra und M heißt erzeuger von $\mathscr{A}$. Man erhält $\mathscr{A}$ über den Schnitt aller σ-Algebren, die M enthalten. Der Operator der Erzeugung ist σ.

$$\sigma(M) = \bigcap_{\substack{M\subseteq A \\ A\ \sigma-Alg.}} A = \mathscr{A}$$

Definition 2.3. (**Borel-σ-Algebra**) Sei $(X, dist)$ ein metrischer Raum. Die von den offenen Teilmengen von X erzeugte σ-Algebra $\mathscr{B}(X)$ heißt Borel-σ-Algebra. $A \in \mathscr{B}(X)$ heißt Borelmenge. Besonders wichtig ist $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathscr{B}^n$.

Definition 2.4. (**Maß**) Sei Ω eine Menge,
Eine Funktion $\mu\colon \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,\infty]$ heißt Maß, falls gilt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)\ und\ A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) Für jede abzählbare Familie $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

(iv) Sind die A_n disjunkte Borelmengen, so gilt außerdem:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

Beispiele 2.5. (Maße) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

- Punktmaß

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 0, & a \notin A \\ 1, & a \in A \end{cases}$$

- Zählmaß

$$\mu(A) := \begin{cases} |A|, & \text{falls } |A| < \infty \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Lebesgue-Maß
  Sei $A = (a, b) \subset \mathbb{R}^n\colon a = \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right),\ b = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right),\ a_i \leq b_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\lambda(A) := \prod_{i=1}^{n} b_i - a_i$$

3 Die Konstruktion des Hausdorff-Maßes

Wir beginnen nun mit der Konstruktion des Hausdorff-Maßes. von nun an sei $(X, dist)$ ein metrischer Raum und $\mathscr{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Des Weiteren wird angenommen: Für jedes $\delta > 0$ gibt es $E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{F}$, so dass $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ und $d\left(E_i\right) \leq \delta$

Definition 3.1. Für $E \subseteq X$ sei

$$d(E) = \sup\left\{x - y : x, y \in E\right\}$$

der so genannte Durchmesser von E.

Definition 3.2. Für $0 < \delta \leq \infty,$ s > 0 und $A \subseteq X$ definieren wir die Abbildung

$$\mathscr{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ d\left(E_i\right) \leq \delta,\ E_i \in \mathscr{F}\right\}$$

Wir wollen nun

$$\sup_{\delta>0} \mathscr{H}_\delta^s(A) \quad \text{für } A \subset X$$

bilden. Betrachtet man die Definition 3.1, so fällt auf, dass $d\left(E_i\right) \leq \delta$ neben $E_i \in \mathscr{F}$ die einzige Einschränkung für die Wahl der überdeckenden Elemente E_i ist. Wird also δ kleiner, so stehen weniger Elemente E_i für die Überdeckung von A zur Verfügung. Da die Abbildung ein Infimum über die Summe der überdeckenden Elemente ist, kann sie nur größer werden, oder gleich bleiben $\mathscr{H}_{\delta_1}^s(A) \leq \mathscr{H}_{\delta_2}^s(A)$ für $\delta_1 > \delta_2$ und alle $A \subseteq X$. Aus dieser Beobachtung folgt die Definition des Hausdorff-Maßes.

Definition 3.3. (s-dimensionales Hausdorff-Maß) Sei s > 0, die Abbildung

$$\mathscr{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathscr{H}_\delta^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathscr{H}_\delta^s(A) \quad \text{für } A \subseteq X$$

heißt s-dimensionales Hausdorff-Maß von A.

Wir zeigen nun, dass es sich hierbei um ein Maß handelt.

Beweis.

(i)

$$\mathscr{H}_\delta^s(\emptyset) = \inf\left\{d\left(E_i\right)^s : d\left(E_i\right) \leq \delta,\ E_i \in \mathscr{F}\right\} \leq \delta^s \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$$

(ii) Sei $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $A \subseteq B$, dann ist jede Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A, und somit

$$\mathscr{H}_\delta^s(B) \geq \mathscr{H}_\delta^s(A)$$

für alle $\delta > 0$, also gilt für $\delta \to 0$

$$\mathscr{H}^s(B) \geq \mathscr{H}^s(A)$$

(iii) Sei $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von Elementen aus $\mathfrak{P}(X)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^s : \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ d\left(E_i\right) \leq \delta,\ E_i \in \mathscr{F}\right\} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^s : \left(A_n\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ d\left(E_i\right) \leq \delta,\ E_i \in \mathscr{F}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s_\delta\left(A_n\right)
\end{aligned}$$

Da $\mathscr{H}^s_{\delta_1}(A) \leq \mathscr{H}^s_{\delta_2}(A)$ für $\delta_1 > \delta_2$ und $A \subseteq X$, gilt:

$$\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s_\delta\left(A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s\left(A_n\right)$$

für alle $\delta > 0$ und mit $\delta \to 0$ folgt:

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathscr{H}^s\left(A_n\right)$$

(iv) Um (iv) zu zeigen, reicht es zu zeigen, dass für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) := \inf\left\{\left|x-y\right| : x \in A, y \in B\right\}$ gilt:

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) = \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B)$$

Den Beweis der Äquivalenz wollen wir nicht führen. Dem interessierten Leser sei jedoch das Buch von P. Mattila [Ma] empfohlen.

Sei nun $\delta > 0$ mit $0 < \delta < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{2}$ und $\left(E_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ sei eine Überdeckung von $A \cup B$ mit $d\left(E_i\right) \leq \delta$ für alle i, dann gilt entweder $E_i \cap A = \emptyset$ oder $E_i \cap B = \emptyset$ für alle i. Also gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s \geq \sum_{A\cap E_i \neq \emptyset} d(E_i)^s + \sum_{B\cap E_i \neq \emptyset} d(E_i)^s \geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B)$$

Sei nun $\left\{E_i\right\}$ eine minimale Überdeckung von $A \cup B$, dann gilt:

$$\mathscr{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s_\delta(A) + \mathscr{H}^s_\delta(B) \quad \text{für alle } 0 < \delta < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{2}$$

und mit $\delta \to 0$ folgt:

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) \geq \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B)$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus der zweiten Eigenschaft des Maßes, also gilt:

$$\mathscr{H}^s(A \cup B) = \mathscr{H}^s(A) + \mathscr{H}^s(B)$$

$\square$

4 Eigenschaften des Hausdorff-Maßes und Hausdorff-Dimension

Wir wollen nun $\mathcal{H}^s(A)$, $A \in \mathbb{R}^s$ für ganzzahlige s betrachten, ohne die Eigenschaften zu Beweisen.

Für $s = 0$ ist $d\left(E_i\right)^s = 1$ für alle $E_i \in \mathcal{F}$. Da $d\left(E_i\right) \leq \delta$ für alle $\delta > 0$, ist $\mathcal{H}^0(A)$ gleich der Anzahl der Punkte in A, für alle $A \subseteq X$. Also ist $\mathcal{H}^0$ gleich dem Zählmaß.

Für $s = 1$ ist $\mathcal{H}^s(A)$ gleich der Länge einer rektifizierbaren Kurve A in $\mathbb{R}^n$.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dann gilt:

$$\mathcal{H}^n(A) = \frac{\lambda^n(A)}{k_n}$$

dabei ist k_n das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Durchmesser eins und λ^n das n-dimensionale Lebesgue-Maß. Daraus und auch aus der Definition von $\mathcal{H}^s$ folgt, dass $\mathcal{H}^s$ translations- und skalierungs-Invariant ist. Es gilt also Also:

$$\mathcal{H}^s(A+a) = \mathcal{H}^s(A) \quad \text{mit } A+a := \{x+a : x \in A\}$$

$$\mathcal{H}^s(cA) = c^s \mathcal{H}^s(A) \quad \text{mit } cA := \{cx : x \in A\}$$

Nun wollen wir die Hausdorff-Dimension näher betrachten.
Sei $t > s$ und $\left(E_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $d\left(E_i\right) \leq \delta$ für alle i. So gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^t \leq \sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^s d\left(E_i\right)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i=1}^{\infty} d\left(E_i\right)^s$$

Also

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

für $\delta \to 0$ gilt nun:

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$$

und

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$$

Durch diese Beobachtung erhalten wir folgende Definition der Hausdroff-Dimension.

Definition 4.1. (Hausdorff-Dimension)

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \inf\left\{t : \mathcal{H}^t(a) < \infty\right\}$$

Anders ausgedrückt ist die Hausdorff-Dimension $\dim_{\mathrm{H}}(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ die eindeutige Zahl, für die gilt:

$$s < \dim_{\mathrm{H}}(A) \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$$

$$t > \dim_{\mathrm{H}}(A) \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$$

Das bedeutet aber, dass $\dim_{\mathrm{H}}(A)$ nicht trivial zu berechnen ist, da für $s = \dim_{\mathrm{H}}(A)$ die drei Fälle

$$\mathscr{H}^s(A) = 0,\ 0 < \mathscr{H}^s(A) < \infty \text{ und } \mathscr{H}^s(A) = \infty$$

auftreten können. Gilt aber $0 < \mathscr{H}^s(A) < \infty$, so folgt $s = \dim_{\mathrm{H}}(A)$

Satz 4.2. Die Hausdorff-Dimension ist monoton:

$$\dim_{\mathrm{H}}(A) \leq \dim_{\mathrm{H}}(B), \quad A \subseteq B \subseteq X$$

Beweis. Da $\mathscr{H}^s(A) \leq \mathscr{H}^s(B)$ für alle s folgt die Behauptung.

□

Satz 4.3. Die Hausdorff-Dimension ist stabil unter abzählbaren Vereinigungen:

$$\dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sup_i \dim_{\mathrm{H}}\left(E_i\right), \quad E_i \subseteq X,\ i = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Da $E_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ für alle i gilt, folgt aufgrund der Monotonie der Hausdorff-Dimension:

$$\sup_i \dim_{\mathrm{H}}\left(E_i\right) \leq \dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)$$

Sei $s > \dim_{\mathrm{H}}\left(E_i\right)$ für alle i, dann ist $\mathscr{H}^s\left(E_i\right) = 0$ für alle i woraus folgt:

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathscr{H}^s\left(E_i\right) = 0$$

mit $s \to \sup_i \dim_{\mathrm{H}}\left(E_i\right) =: t$ folgt:

$$\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{E_i : \mathscr{H}^t(E_i) > 0} E_i\right) \leq \sum_{E_i : \mathscr{H}^t(E_i) > 0} \mathscr{H}^s\left(E_i\right) \Rightarrow \dim_{\mathrm{H}}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sup_i \dim_{\mathrm{H}}\left(E_i\right)$$

□

5 Bestimmung von Hausdorff-Dimensionen

Wir wollen nun die Hausdorff-Dimension einiger Fraktale bestimmen. Wichtig dabei ist, dass diese Konstruktionen nicht eindeutig sind, sondern Parameter enthalten, durch deren Änderung das Hausdorff-Maß sowie die Hausdorff-Dimension der Menge geängert werden können.

Beispiel 5.1. (Cantormenge)
Dies sind die ersten sechs Konstruktionsschritte für die eindimensionale Cantormenge.

Sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, Sei $I_{0,1} = [0,1]$ das Startintervall und $I_{1,1} = [0,\alpha]$ und $I_{1,2} = [1-\alpha, 1]$ die Intervalle nach dem ersten Konstruktionsschritt der Cantormenge. In der Abbildung oben ist $\alpha = \frac{1}{3}$. Die Menge der Intervalle verdoppelt sich bei jedem Konstruktionsschritt und es wird ein Intervall der Länge $(1-2\alpha) \cdot d(I_{k-1}) = (1-2\alpha) \cdot \alpha^{k-1}$ aus der Mitte aller Intervalle $I_{k-1,1}, \dots, I_{k-1,2^{k-1}}$ gelöscht. Die Länge aller erhaltenen Intervalle ist α^k. Die durch unendliche Wiederholung dieses Konstruktionsschrittes erhaltene Menge ist die Cantor Menge $C(\alpha)$. Da bei jedem Schritt Intervalle verschwinden, ist jede Menge zwischen zwei Konstruktionsschritten eine Überdeckung von $C(\alpha)$. Wir versuchen nun ein $0 < s < \infty$ zu finden, so dass $0 < \mathscr{H}^s(C(\alpha)) < \infty$ gilt, woraus $\dim_{\mathrm{H}}(C(\alpha)) = s$ folgen würde.

$$\mathscr{H}^s_{\alpha^k}(C(\alpha)) \leq \sum_{j=1}^{2^k} d\left(I_{k,j}\right)^s = 2^k \alpha^{sk} = (2\alpha^s)^k$$

Da wir hoffen eine obere Grenze für $\mathscr{H}^s(C(\alpha))$ zu finden, die endlich ist, sollte die Summe für $k \to \infty$ konvergieren. Der kleinste wert s für den das gilt ist $2\alpha^s = 1$ also:

$$s = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

daraus folgt:

$$\mathscr{H}^s(C(\alpha)) = \lim_{k\to\infty} \mathscr{H}^s_{\alpha^k}(C(\alpha)) \leq 1$$

und damit gilt $\dim_{\mathrm{H}}(C(\alpha)) \leq s$. Die Abschätzung nach unten ist etwas komplizierter. Wir wollen zeigen, dass $\mathscr{H}^s(C(\alpha)) \geq \frac{1}{4}$ ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_j d\left(I_j\right)^s \geq \frac{1}{4} \tag{5.1}$$

für alle Überdeckungen offener Intervalle $I_1, I_2, \dots$ von $C(\alpha)$ gilt, da dass Hausdorff-Maß ein Infimum über Überdeckungen bildet. Da $C(\alpha)$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $I_1, I_2, \dots, I_n$ für $C(\alpha)$. Sei

$$M := \left\{ [-1,2] \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \right\}$$

die Menge der Punkte in [-1,2] die nicht von $I_1, I_2, \dots, I_n$ überdeckt werden.

Da $C(\alpha)$ keine inneren Punkte hat, gilt: $\gamma = \text{dist}(M, C(\alpha)) > 0$.
Nun wählen wir k so groß, dass $\gamma > \alpha^k = d(I_{k,i})$ gilt. Das bedeutet, dass jedes $I_{k,i}$, das ja mindestens einen Punkt aus $C(\alpha)$ beinhalten muss, kürzer ist, als der minimale Abstand von einem Punkt der Cantormenge zu einem Punkt, der nicht von einem I_j überdeckt wird, folglich werden alle $I_{k,i}$ von einem I_j überdeckt.
Nun zeigen wir, dass für jedes offene Intervall I und jedes feste l gilt:

$$\sum_{I_{l,i} \subset I} d\left(I_{l,i}\right)^s \leq 4d\left(I\right)^s \tag{5.2}$$

Daraus folgt (5.1), da

$$4\sum_j d\left(I_j\right)^s \geq \sum_j \sum_{I_{k,i} \subset I_j} d\left(I_{k,i}\right)^s \geq \sum_{i=1}^{2^k} d\left(I_{k,i}\right)^s = 1$$

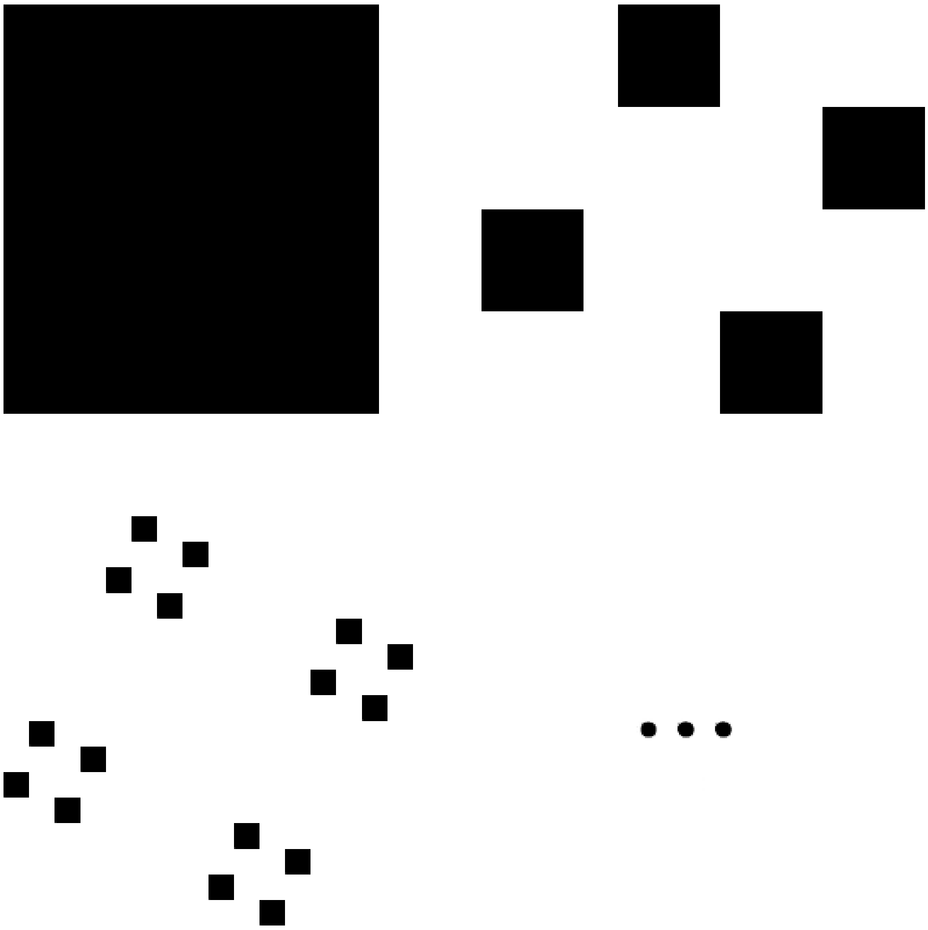
Um (5.2) zu zeigen, nehmen wir an es liegen ein paar Intervalle $I_{l,i}$ in I und n sei die kleinste ganze Zahl, für die I Intervalle $I_{n,i}$ überdeckt. Dann ist $n \leq l$ und es gibt höchstens vier Intervalle $I_{n,j_1}, \ldots, I_{n,j_4}$ deren Schnitt mit I nicht leer ist. Andernfalls gäbe es ein Intervall $I_{n-1,i}$, so dass $I_{n-1,i} \subset I$ gelten würde. Daraus folgt:

$$4d\left(I\right)^s \geq \sum_{m=1}^{4} d\left(I_{n,j_m}\right)^s \geq \sum_{m=1}^{4} \sum_{I_{l,i} \subset In,j_m} d\left(I_{l,i}\right)^s \geq \sum_{I_{l,i} \subset I} d\left(I_{l,i}\right)^s$$

und somit:

$$\frac{1}{4} \leq \mathscr{H}^s(C(\alpha)) \leq 1 \qquad ,\text{mit } s = \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$$

Beispiel 5.2. (Cantorstaub) Dies sind die ersten drei Konstruktionsschritte für den Cantorstaub.



Die Konstruktionsvorschrift unterteilt ein Quadrat im n-ten Schritt in 16 gleich große Quadrate und lässt nur jedes dritte Quadrat am Rand des Quadrates aus dem (n-1)-ten Schritt stehen. Der bei unendlicher Wiederholung resultierende Cantorstaub soll hier mit C bezeichnet werden.
Wir versuchen nun wie bei der Cantormenge $\mathscr{H}^s(C)$ für ein s nach oben und unten positiv endlich abzuschätzen, woraus $\dim_{\mathrm{H}}(C) = s$ folgen würde. Wir betrachten zunächst das Hausdorff-Maß eines beliebigen Konstruktionsschrittes.
Sei C_n die Menge der Quadrate nach dem n-ten Konstruktionsschritt. C_n besteht aus 4^n Quadraten mit der Seitenlänge 4^{-n} und dem Durchmesser $\frac{\sqrt{2}}{4^n} = \delta_n$, mit der Konvention, dass das Anfangsquadrat die Seitenlänge eins hat. Da in weiteren Konstruktionsschritten nur noch Teile der Quadrate entfernt werden, ist jede Menge C_n eine Überdeckung von C. Man erhält so die Abschätzung $\mathscr{H}^1_{\delta_n}(C) \leq \left(\frac{4}{4}\right)^n \sqrt{2}$ mit $n \to \infty$ geht auch $\delta_n \to 0$ und es folgt $\mathscr{H}^1(C) \leq \sqrt{2}$.

Nun definieren wir uns eine Abbildung p, für die $0 < \mathscr{H}^1(p(C_n)) \leq \mathscr{H}^1(C_n)$ gilt. Was durch die Translations- und Skalierunginvarianz des Hausdorff-Maßes ermöglicht wird. p ist die orthogonale Projektion aller Punkte aus C_n auf die x-Achse.
p vergrößert keine Abstände, es gilt also: $\left|p(x) - p(y)\right| \leq \left|x - y\right|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$. Der Skalierungsfaktor von p ist damit kleiner oder gleich 1, woraus folgt: $\mathscr{H}^1(p(C_n)) \leq \mathscr{H}^1(C_n)$. C_n besteht aus 4^n Quadraten mit Kantenlänge 4^{-n} und alle Schnitte zweier abgebildeter Quadrate enthalten höchstens einen Punkt. Also wird das Intervall [0,1] von den abgebildeten Quadraten voll ausgefüllt. $\mathscr{H}^s([0,1]) = 1$ womit $0 < \mathscr{H}^1(p(C_n)) \leq \mathscr{H}^1(C_n)$ gezeigt ist und $\dim_{\mathrm{H}}(C) = 1$ folgt.

6 Literaturverzeichnis

- [Ma] P. Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press, 1995.
- [Ed] G. A. Edgar, Measure, topology and fractal geometry, Springer, 2008
- [El] J. Elstrodt, Maß-und Integrationstheorie , Springer, 2007
- http://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_kraemer.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension