

Proseminar „Mengentheoretische Topologie“

WiSe 2012/13

(1) Mengentheoretische Grundlagen

- Wichtige Begriffe (Mengen, Relationen, Abbildungen)
- Axiomatik
- Sätze im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom

(2) Konstruktion der reellen Zahlen

- mengentheoretische Begründung der natürlichen Zahlen
- (algebraische) Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen
- Dedekind'sche Schnitte
- Operationen, Relationen auf den reellen Zahlen

(3) Filter und Ultrafilter

- Motivation und Definition
- Eigenschaften
- Zerlegungslemma und Fixpunktsatz
- Netze (Moore-Smith-Folgen)

(4) Metrische Räume

- Motivation und Definition
- Konvergenz, Stetigkeit, offene/abgeschlossene Mengen
- Abschluß- und Kernoperator
- Dichtheit

(5) Vollständigkeit

- Cauchy-Eigenschaft für Folgen und Filter
- Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktivität
- Banach'scher Fixpunktsatz

(6) Vervollständigungen

- Konstruktion vollständiger Räume aus nicht vollständigen
- alternative Gewinnung der reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen

(7) Beschränktheits- und Kompaktheitsbegriffe

- Beschränktheit vs. totale Beschränktheit (Präkompaktheit)
- Kompaktheit (Charakterisierungen durch Konvergenz und durch offene Mengen)
- Kompaktheit und stetige Abbildungen
- kompakt = präkompakt + vollständig

(8) Zusammenhangsbegriffe, nützliche Sätze

- Zusammenhang und Wegzusammenhang
- Zwischenwertsatz
- Unzusammenhängendes

(9) Funktionenräume

- gleichmäßige Konvergenz
- Satz von Arzela-Ascoli

(10) Hyperräume

- Hausdorff-Metrik
- Beschreibung der offenen Mengen
- Kompaktheit bezüglich der Hausdorff-Metrik
- Cantor-Staub und von-Koch-Kurve

(11) Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension

(12) Grenzen des metrischen Konzeptes

- Produkträume
- punktweise Konvergenz von Filtern und Folgen i.a. nicht durch Metrik beschreibbar