Ergänzungen zum Käferbuch

René Bartsch

(Fassung von 2016-07-18- 000:10)

Inhalt

Kapitel 3

Einige topologische Konstruktionen

3.99 Neue Übungsaufgaben

Aufgabe 3.A.01. Sei X eine Menge mit mindestens zwei Elementen, ausgerüstet mit diskreter Topologie δ. Sei ferner $X^{\mathbb{Z}} = \prod_{i\in\mathbb{Z}}(X,\delta)$ ausgestattet mit Produkttopologie. Untersuche, ob (in Analogie zur Lage bei der Ausrüstung von Bild- und Urbildraum mit diskreter Topologie) auch in dieser Konstellation *jede* Funktion $f : X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}}$ stetig ist.

3.100 Lösungsvorschläge

Lösungsvorschlag 3.A.01.:
Bei einem einelementigen X kann natürlich nicht viel schief gehen. Ansonsten nehmen wir exemplarisch $X := \{0, 1\}$,

$$f : X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}} : f((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := \begin{cases} (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} & ; \quad \text{falls } a_i = 1 \text{ für unendlich viele } i \\ (0)_{i\in\mathbb{Z}} & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachten das Urbild von $O := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid a_0 = 1\}$. Es sollte Einigkeit darüber bestehen, daß O im Sinne der Produkttopologie offen ist. Das Urbild $f^{-1}(O)$ besteht aus *genau* denjenigen Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, die an der Stelle $i = 0$ *und an unendlich vielen weiteren Stellen* den Wert 1 annehmen. Jedes Element der Standard-Basis der Produkttopologie enthält aber notgedrungen auch solche Folgen, die nur an endlich vielen Stellen den Wert 1 annehmen. Daher ist $f^{-1}(O)$ nicht als Vereinigung von Basiselementen darstellbar und somit nicht offen in der Produkttopologie. Mithin ist f nicht stetig.

EDIT - einfachere Variante:

Sei wieder $X := \{0, 1\}$, sei $p := (0)_{i\in\mathbb{Z}}$ und $O := \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid a_0 = 1\}$, so daß $p \notin O$ gilt. Setze

$$g : X^{\mathbb{Z}} \to X^{\mathbb{Z}} : g((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := \begin{cases} (1)_{i\in\mathbb{Z}} & ; \quad \text{falls } (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} = p \\ p & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Damit haben wir $g^{-1}(O) = \{p\}$. Natürlich ist auch hier zu begründen, daß O offen ist, aber $\{p\}$ nicht. $\square$

Kapitel 5

Kompaktheit

5.98 Ergänzungen

5.98.1 Die Stone-Čech-Kompaktifizierung als maximale Hausdorff'sche Kompaktifizierung

Wir schließen an das Einbettungslemma 5.4.6 an. Da wir sie jetzt öfter mal brauchen, geben wir der Konstruktion der Abbildung aus dem Einbettungslemma ein eigenes Symbol:
Ist X eine Menge, $(Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen und $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ eine zugehörige Familie v on Abbildungen. Dann sei die Abbildung $\Delta_{i\in I} f_i : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ definiert durch

$$\left(\Delta_{i\in I} f_i\right)(x) := (f_i(x))_{i\in I} \ .$$

Wir nennen $\Delta_{i\in I} f_i$ die aus den f_i, $i \in I$ gebildete *Diagonalabbildung*.
Sind nur zwei Abbildungen f_1, f_2 an der Konstruktion beteiligt, so schreiben wir statt $\Delta_{i\in\{1,2\}} f_i$ lieber $f_1 \triangle f_2$.

Jetzt nähern wir uns der angestrebten Kompaktifizierung erst einmal auf eine recht abstrakte Weise: wir wollen zeigen, daß es für jeden Tychonoff-Raum eine „in gewissem Sinne" *maximale T_2-Kompaktifizierung* gibt. Dazu müssen wir im Prinzip drei Dinge erledigen:

- Zeigen, daß es überhaupt zu jedem Tychonoff-Raum eine Kompaktifizierung gibt, die T_2 erfüllt.

- Rauskriegen, in welchem „gewissen Sinne" sich T_2-Kompaktifizierungen ein und desselben Tychonoff-Raumes vergleichen lassen, was also „maximal" bedeuten könnte. Wir werden dazu eine reflexive Halbordnung auf Äquivalenzklassen von Kompaktifizierungen basteln.

- Zeigen, daß es bezüglich unsrer Halbordnung tatsächlich ein maximales Element gibt - vorzugsweise wollen wir das Zorn'sche Lemma anwenden.

Los geht's mit dem ersten Auftrag.

Definition 5.98.1. Sei (X,τ) ein Tychonoff-Raum. Mit $C(X,[0,1])$ bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen von X in das mit euklidischer Topologie versehene Einheitsintervall. Nun sei

$$[0,1]^{C(X,[0,1])} = \prod_{g\in C(X,[0,1])} [0,1]_g$$

(wobei für alle $g \in C(X,[0,1])$ mit $[0,1]_g$ das Intervall $[0,1]$ mit euklidischer Topologie gemeint sein soll) die Familie *aller* Abbildungen von $C(X,[0,1])$ nach $[0,1]$, welche wir mit Produkttopologie (= Topologie der punktweisen Konvergenz) versehen.
Jetzt ordnen wir jedem $x \in X$ die Abbildung

$$h_x : C(X,[0,1]) \to [0,1] : h_x(g) := g(x)$$

zu. Wir können h_x auch als Tupel (Element des Produktes $\prod_{g\in C(X,[0,1])}[0,1]_g$) schreiben: $h_x = (g(x))_{g\in C(X,[0,1])}$.

Diese Zuordnung ist offenbar eine Abbildung von X in $[0,1]^{C(X,[0,1])}$, wir bezeichnen sie mit e_X,

$$e_X : X \to [0,1]^{C(X,[0,1])} : e_X(x) := h_x \;\;=\;\; (g(x))_{g\in C(X,[0,1])} \;.$$

Lemma 5.98.2. *Für jeden Tychonoff-Raum (X,τ) ist die Abbildung*

$$e_X : X \to \prod_{g\in C(X,[0,1])} [0,1]_g : e_X(x) := (g(x))_{g\in C(X,[0,1])}$$

ein Homöomorphismus auf ihr Bild.

Beweis: Dieses sichert gerade unser voriges Einbettungslemma 5.4.6: für jedes $x \in X$ haben wir ja offenbar $e_X(x) = (g(x))_{g\in C(X,[0,1])}$, so daß unser e_X just so gebildet ist, wie die Funktion f im Einbettungslemma, wobei $I := C(X,[0,1])$ und $f_g := g, g \in C(X,[0,1])$ gewählt ist. Demzufolge ist e_X zunächst einmal stetig laut 5.4.6(1). Da die einpunktigen Mengen in (X,τ) abgeschlossen sind und es sich auch noch um einen vollständig regulären Raum handelt, gibt es zu je zwei verschiedenen Elementen $x_1, x_2 \in X$ eine stetige Funktion $g \in C(X,[0,1])$ mit $g(x_1) = 0$ und $g(x_2) = 1$, also ist e_X injektiv nach 5.4.6(2). Zudem haben wir für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und jedes Element $x \in X \setminus A$ wegen der vollständigen Regularität auch ein $g \in C(X,[0,1])$ mit $g(x) = 0$ und $g(A) \subseteq \{1\}$, also jedenfalls $g(x) \notin \overline{g(A)} \subseteq \overline{\{1\}} = \{1\}$. Daher ist e_X als Abbildung von X nach $e_X(X)$ auch offen, laut 5.4.6(3). □

Korollar 5.98.3. *Ist (X,τ) ein Tychonoff-Raum, dann ist $\overline{e_X(X)}$ mit*

$$e_X : X \to \prod_{g\in C(X,[0,1])} [0,1]_g : e_X(x) := (g(x))_{g\in C(X,[0,1])}$$

eine Kompaktifizierung von (X,τ) und ein T_2-Raum.

Beweis: Die $[0,1]_g$ mit euklidischer Topologie sind kompakt und T_2, also ihr Produkt $\prod_{g\in C(X,[0,1])}[0,1]_g$ laut 5.1.9 bzw. 4.2.7 ebenfalls. Als abgeschlossene Teilmenge davon ist $\overline{e_X(X)}$ somit auch kompakt und natürlich T_2. Und selbstverfreilich ist das laut 5.98.2 zu X homöomorphe Bild $e_X(X)$ dicht in $\overline{e_X(X)}$. □

Wir betrachten nun etwas genauer die „Zutaten“ einer Kompaktifizierung von (X, τ):
Wir haben genaugenommmen immer ein *Paar* $(c, \overline{c(X)})$ aus einer *Einbettungsabbildung* $c : X \to Y$ und einem kompakten, Hausdorff'schen Bildraum $Y = \overline{c(X)}$. Wir bezeichnen so ein Paar hier kurz mit cX.[1]

In einem Anflug von Überladung der Notation wird gelegentlich *sowohl* das Paar $(c, \overline{c(X)})$ *als auch* der Bildraum $\overline{c(X)}$ mit cX bezeichnet.

Haben wir nun einmal eine Kompaktifizierung $(c, \overline{c(X)})$ gefunden, so liefert offenbar auch jeder zu $\overline{c(X)}$ homöomorphe Raum in naheliegender Weise eine weitere Kompaktifizierung. Es wäre müßig, zwischen diesen zu unterscheiden.

Definition 5.98.4. Zwei T_2-Kompaktifizierungen $(c_1, \overline{c_1(X)})$ und $(c_2, \overline{c_2(X)})$ eines Raumes (X, τ) nennen wir *äquivalent* genau dann, wenn ein Homöomorphismus $f : c_1X \to c_2X$ existiert mit $c_2 = f \circ c_1$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ \overline{c_1(X)} \arrow[rr, shift right, "f"'] & & \overline{c_2(X)} \arrow[ll, shift right, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Wir beachten hierbei, daß für die Äquivalenz von Kompaktifizierungen $(c_1, \overline{c_1(X)})$ und $(c_2, \overline{c_2(X)})$ *nicht nur* die Bildräume $\overline{c_1(X)}$ und $\overline{c_2(X)}$ homöomorph sein müssen, sondern auch die *Art der Einbettung* vermittels desselben Homöomorphismus korrespondieren muß![2]

Unser Plan ist natürlich, Klassen äquivalenter Kompaktifizierungen zu betrachten.
Doch oh Schreck - es gibt ein Problem: es entstehen mengentheoretisch *echte Klassen (Unmengen)*. Und mit denen können wir nicht ganz so sorglos spielen wie mit Mengen. Wir wollen sie insbesondere als *Elemente* unter einer Halbordnung betrachten, aber genau das lassen sich Unmengen nicht gern gefallen. Wir könnten jetzt unsere Mengenlehre modifizieren. Aber wir kommen auch anders zurecht:

Lemma 5.98.5. *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (Y, σ) eine Kompaktifizierung von (X, τ) derart, daß (Y, σ) auch ein T_2-Raum ist. Dann gilt $|Y| \leq |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))|$.*

[1] Darin steckt - recht komprimiert - *fast* alles an Information, was hier eine Rolle spielt: kompaktifiziert wird ein Raum mit Grundmenge X (die Angabe der Topologie τ wird in dieser Notation unterdrückt; in den allermeisten Fällen [und jedenfalls bei uns in diesem Abschnitt] dürfte aber jeweils nur eine Topologie auf X in Rede stehen), indem er durch die Abbildung c in einen (bislang namenlosen) kompakten Raum abgebildet wird, in dem das Bild $c(X)$ aber jedenfalls dicht liegt und den man daher auch einfach mit $\overline{c(X)}$ bezeichnen kann. Wir beachten den feinen Unterschied zwischen $c(X)$ und cX.

[2] So können wir beispielsweise den Raum $X := \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (mit euklidischer Topologie versehen) einerseits durch die Abbildung $c_1 : X \to [0, 1] : c_1(x) := x$ dicht in das kompakte euklidische Intervall $[0, 1]$ einbetten und andrerseits durch die Abbildung $c_2 : X \to [0, 1] : c_2(x) := \begin{cases} x + \frac{1}{2} & ; \quad x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & ; \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$.
Man überlegt sich leicht ($\to$ Übung!), daß c_1 und c_2 tatsächlich homöomorphe Einbettungen sind, daß natürlich $[0, 1]$ homöomorph zu sich selbst ist - daß es aber keine stetige Abbildung f *von* $[0, 1]$ *nach* $[0, 1]$ gibt, die $c_2 = f \circ c_1$ erfüllt, erst recht also keinen derartigen Homöomorphismus.

Beweis: Wir identifizieren X mit seinem homöomorphen Bild in Y. Da X dicht in Y liegt, gibt es zu jedem Punkt $y \in Y$ einen Ultrafilter φ_y auf X, der gegen y konvergiert. Es kann also nicht „mehr" Elemente in Y geben als Ultrafilter auf X, d.h. es existiert eine surjektive Abbbildung $\kappa : \mathbb{U}(X) \to Y$ bzw. eine injektive Abbildung $d : Y \to \mathbb{U}(X)$. Jedenfalls folgt $|Y| \leq |\mathbb{U}(X)| \overset{1.4.21}{=} |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))|$. $\square$

Damit ist unser mengentheoretisches Problem gelöst: für einen gegebenen Tychonoff-Raum (X, τ) nehmen wir uns eine beliebige hinreichend mächtige Menge Y (z.B. $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$ selbst) und wissen nun, daß jede Äquivalenzklasse von T_2-Kompaktifizierungen von X auch einen Repräsentanten hat, dessen Grundmenge eine Teilmenge von Y ist. Wenn wir also fürderhin nur mit Äquivalenzklassen von T_2-Kompaktifizierungen arbeiten, deren Grundmengen jeweils Teilmengen von Y sind, erwischen wir also trotzdem immer noch alle überhaupt möglichen Äquivalenzklassen.

Wir werden diese Restriktion im weiteren Verlauf nicht mehr immerzu ausdrücklich erwähnen.

Definition 5.98.6. Sind $(c_1, \overline{c_1(X)}), (c_2, \overline{c_2(X)})$ Hausdorff'sche Kompaktifizierungen des Raumes (X, τ), so nennen wir $(c_1, \overline{c_1(X)})$ *größer* als $(c_2, \overline{c_2(X)})$ (in Zeichen: $(c_2, \overline{c_2(X)}) \leq (c_1, \overline{c_1(X)})$, bzw. kurz $c_2 X \leq c_1 X$) genau dann, wenn eine *stetige Abbildung* $f : \overline{c_1(X)} \to \overline{c_2(X)}$ existiert mit $f \circ c_1 = c_2$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\
\overline{c_1(X)} \arrow[rr, "f"'] & & \overline{c_2(X)}
\end{tikzcd}$$

Wir rechnen schnell nach, daß diese Relation reflexiv und transitiv ist: Reflexivität: $(c_1, \overline{c_1(X)}) \leq (c_1, \overline{c_1(X)})$ ist mit $f := \mathbb{1}_{\overline{c_1(X)}}$ klar.
Transitivität: Sei $(c_3, \overline{c_3(X)}) \leq (c_2, \overline{c_2(X)})$ und $(c_2, \overline{c_2(X)}) \leq (c_1, \overline{c_1(X)})$, dann existieren Homöomorphismen $f : \overline{c_1(X)} \to \overline{c_2(X)}$ und $g : \overline{c_2(X)} \to \overline{c_3(X)}$ mit $c_2 = f \circ c_1$ und $c_3 = g \circ c_2$,

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, "c_2"] \arrow[dr, "c_3"] & \\
\overline{c_1(X)} \arrow[r, "f"'] & \overline{c_2(X)} \arrow[r, "g"'] & \overline{c_3(X)}
\end{tikzcd} \tag{5.1}$$

also auch $c_3 = (g \circ f) \circ c_1$ und damit $(c_3, \overline{c_3(X)}) \leq (c_1, \overline{c_1(X)})$.
Freilich ist diese Relation eher nicht antisymmetrisch. Aber wir haben:

Lemma 5.98.7. *Zwei Hausdorff'sche Kompaktifizierungen $c_1 X, c_2 X$ eines Raumes (X, τ) sind genau dann äquivalent, wenn $c_1 X \leq c_2 X$ und $c_2 X \leq c_1 X$ gelten.*

Beweis: Wenn $c_1 X$ und $c_2 X$ äquivalent sind, existiert also ein Homöomorphismus $f : \overline{c_1(X)} \to \overline{c_2(X)}$ mit $c_2 = f \circ c_1$, somit haben wir sofort $c_1 X \geq c_2 X$. Für den inversen Homöomorphismus

f^{-1} gilt dann natürlich $f^{-1} \circ c_2 = c_2$, so daß $c_1X \leq c_2X$ folgt.

Gelten andrerseits $c_1X \leq c_2X$ und $c_2X \leq c_1X$, so haben wir jedenfalls stetige Abbildungen $f : \overline{c_1(X)} \to \overline{c_2(X)}$ und $g : \overline{c_2(X)} \to \overline{c_1(X)}$ derart, daß $c_2 = f \circ c_1$ und $c_1 = g \circ c_2$ gelten. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} c_1 &= g \circ c_2 \\ &= g \circ (f \circ c_1) \\ &= (g \circ f) \circ c_1 \ . \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß $g \circ f$ auf $c_1(X)$ wie die Identität wirkt, d.h. $(g \circ f)_{|c_1(X)} = \mathbb{1}_{c_1(X)}$. Nun ist die Identität $\mathbb{1}_{\overline{c_1(X)}}$ eine stetige Abbildung von $\overline{c_1(X)}$ nach $\overline{c_1(X)}$ - da sie mit $g \circ f$ auf der dichten Teilmenge $c_1(X)$ von $\overline{c_1(X)}$ übereinstimmt, folgt mit Lemma 4.2.4 nun $g \circ f = \mathbb{1}_{\overline{c_1(X)}}$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ \overline{c_1(X)} \arrow[rr, shift right, "f"'] & & \overline{c_2(X)} \arrow[ll, shift right, "g"'] \end{tikzcd}$$

Analog erhalten wir $c_2 = f \circ g \circ c_2$ und daraus $f \circ g = \mathbb{1}_{\overline{c_2(X)}}$.
Somit sind f und g zueinander inverse stetige Bijektionen, d.h. Homöomorphismen. □

Korollar 5.98.8. *Ist (X, τ) ein Tychonoff-Raum, und bezeichnet $[cX]$ die Äquivalenzklasse aller zur T_2-Kompaktifizierung cX äquivalenten T_2-Kompaktifizierungen von X, dann ist durch*

$$[c_1X] \leq [c_2X] \ :\Longleftrightarrow \ c_1X \leq c_2X$$

eine reflexive Halbordnung gegeben auf den Äquivalenzklassen der T_2-Kompaktifizierungen von X.

Wir beachten hier noch einmal kurz, daß wir nur von solchen Kompaktifizierungen reden, deren Grundmengen alle in ein und derselben fest gewählten Menge Teilmengen sind!

Beweis: Wir müssen eigentlich nur klären, daß das überhaupt wohldefiniert ist, d.h. wenn für irgendwelche Repräsentanten c_1X von $[c_1X]$ und c_2X von $[c_2X]$ gilt $c_1X \leq c_2X$, dann muß für alle Repräsentanten d_1X von $[c_1X]$ und d_2X von $[c_2X]$ ebenfalls $d_1X \leq d_2X$ gelten. Nun sichert aber Lemma 5.98.7 gerade $d_1X \leq c_1X$ und $c_2X \leq d_2X$, so daß mit der bei (5.1) bereits nachgerechneten Transitivität nun auch $d_1 \leq d_2$ folgt.
Reflexivität ist anhand der identischen Abbildungen $\mathbb{1} : \overline{c(X)} \to \overline{c(X)}$ klar, Transitivität hatten wir auch schon - und die Antisymmetrie sichert gerade wieder Lemma 5.98.7. □

Lemma 5.98.9. *Sei (X, τ) ein Tychonoff-Raum, sei $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ eine Familie kompakter Hausdorff-Räume, $(f_i)_{i \in I}$ eine zugehörige Familie stetiger Abbildungen $f_i : X \to Y_i$. Für mindestens ein*

$i_0 \in I$ sei (f_{i_0}, Y_{i_0}) eine T_2-Kompaktifizierung (dabei sei $\prod_{i\in I} Y_i$ mit Produkttopologie ausgestattet). Dann ist auch

$$\Delta_{i\in I} f_i : X \to \prod_{i\in I} Y_i : \ (\Delta_{i\in I} f_i)(x) = (f_i(x))_{i\in I}$$

mit dem Bildraum $\overline{(\Delta_{i\in I} f_i)(X)}$ eine Kompaktifizierung.

Beweis: Da alle Y_i kompakte Hausdorff-Räume sind, ist auch $\prod_{i\in I} Y_i$ ein kompakter Hausdorff-Raum und somit ist als abgeschlossener Teilraum auch $\overline{(\Delta_{i\in I} f_i)(X)}$ kompakt - und natürlich hausdorff'sch. Daß das Bild von X darin dicht ist, ist auch klar.
Nun ist $\Delta_{i\in I} f_i$ injektiv, weil bereits f_{i_0} es ist. Zudem ist $\Delta_{i\in I} f_i$ stetig laut Einbettungslemma 5.4.6**??**.
Sei nun $A \subseteq X$ abgeschlossen und $p \in X \setminus A$. Da f_{i_0} ein Homöomorphismus auf's Bild ist, ist dann auch $f_{i_0}(A)$ abgeschlossen *in* $f_{i_0}(X)$ und natürlich gilt $f_{i_0}(p) \notin f_{i_0}(A)$, weil f_{i_0} injektiv ist. Daß $f_{i_0}(A)$ abgeschlossen in $f_{i_0}(X)$ ist, bedeutet ja, daß es eine in $\prod_{i\in I} Y_i$ abgeschlossene Menge B gibt mit $f_{i_0}(A) = B \cap f_{i_0}(X)$. da $f_{i_0}(p)$ natürlich in $f_{i_0}(X)$ liegt, aber nicht in $f_{i_0}(A)$, muß $f_{i_0}(p) \notin B$ gelten - dann liegt aber $f_{i_0}(p)$ auch definitiv nicht in dem in $\prod_{i\in I} Y_i$ gebildeten Abschluß von $f_{i_0}(A)$, denn der läge innerhalb von B. Mit unserem f_{i_0} ist also stets die in 5.4.6**??** geforderte Voraussetzung gewährleistet - und damit ist nun $\Delta_{i\in I} f_i$ tatsächlich wieder eine Einbettung. □

Satz 5.98.10 (Stone-Čech - abstrakt)**.** *Ist (X, τ) ein Tychonoff-Raum, dann gibt es in der Familie aller Äquivalenzklassen von T_2-Kompaktifizierungen von X eine global maximale Klasse $[\beta X]$. Für jeden ihrer Repräsentanten βX gelten:*

(1) Für jeden kompakten Hausdorff-Raum (Y, σ) und jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ gibt es genau eine stetige Abbildung $F : \beta X \to Y$ mit $f = F \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta"'] & (Y,\sigma) \\
\overline{\beta(X)} \arrow[ur, dashed, "F"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

(2) βX ist durch die Eigenschaft (1) bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt, d.h. ist αX eine Hausdorff'sche Kompaktifizierung von X derart, daß zu jeder stetigen Abbildung $g : X \to Z$ in einen kompakten Hausdorff-Raum (Z, ζ) eine stetige Abbildung $G : \alpha X \to Z$ mit $g = G \circ \alpha$ existiert, dann ist αX äquivalent zu βX, d.h. insbesondere $\overline{\alpha(X)}$ homöomorph zu $\overline{\beta(X)}$.

(3) Jede T_2-Kompaktifizierung $(c, \overline{c(X)})$ von (X, τ) ist ein Quotient von βX.

Beweis: Um zu zeigen, daß es eine maximale Klasse gibt, wollen wir das Zorn'sche Lemma anwenden. Dazu müssen wir zeigen, daß jede total geordnete Familie von T_2-Kompaktifizierungen eine obere Schranke hat. Wir zeigen sogar etwas mehr: *jede* nichtleere Familie von T_2-Kompaktifizierungen unseres Raumes (X, τ) hat eine obere Schranke.

Sei dazu $(c_i, \overline{c_i(X)})_{i\in I}$ irgendeine Familie von Kompaktifizierungen von X. Dann ist nach Lemma 5.98.9 auch $(\Delta_{i\in I} f_i, \overline{(\Delta_{i\in I} f_i)\,(X)})$ eine Kompaktifizierung von X. Zudem haben wir mit den kanonischen Projektionen $p_k : \prod_{i\in I} \overline{c_i(X)} : p_k((y_i)_{i\in I}) := y_k$ jeweils $p_k \circ \Delta_{i\in I} f_i = c_k$, also $(c_k, \overline{c_k(X)}) \leq (\Delta_{i\in I} f_i, \overline{(\Delta_{i\in I} f_i)\,(X)})$.
Nun stellen wir fest, daß wir das Zorn'sche Lemma an dieser Stelle gar nicht mehr brauchen, denn wir können als Familie $(c_i, \overline{c_i(X)})_{i\in I}$ einfach gleich *alle* T_2-Kompaktifizierungen von (X, τ) nehmen[3].
Sei nun also $(\beta, \overline{\beta(X)})$ ein Repräsentant unsrer maximalen Klasse.

(1) Sei (Y, σ) ein kompakter Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ stetig. Nach Lemma 5.98.9 ist nun $(\beta\triangle f, \overline{(\beta\triangle f)(X)})$ eine Kompaktifizierung von X, so daß es wegen der Maximalität von $(\beta, \overline{\beta(X)})$ eine stetige Abbildung $P : \overline{\beta(X)} \to \overline{(\beta\triangle f)(X)}$ gibt mit $P \circ \beta = \beta\triangle f$. Sei nun $\mathrm{p}_Y : \overline{\beta(X)} \times Y \to Y : \mathrm{p}_Y((b, y)) := y$ die Projektion von $\overline{\beta(X)} \times Y$ auf Y. Dann haben wir $\mathrm{p}_Y \circ (\beta\triangle f) = f$ und somit auch $\mathrm{p}_Y \circ P \circ \beta = \mathrm{p}_Y \circ (\beta\triangle f) = f$. Wir setzen $F := \mathrm{p}_Y \circ P$ und haben unsere gesuchte Abbildung. Die Eindeutigkeit derselben ergibt sich nun schlicht aus Satz 4.4.6.

(2) Sei so ein αX gegeben. Wir setzen für Z unsere maximale Kompaktifizierung βX ein und erhalten nach Voraussetzung über α eine stetige Abbildung $G : \overline{\alpha(X)} \to \overline{\beta(X)}$ mit $\beta = G \circ \alpha$, also $\alpha X \geq \beta X$. Andrerseits ist βX maximal, d.h. $\alpha X \leq \beta X$. Somit ist laut Lemma 5.98.7 unser αX äquivalent zu βX.

(3) Nach (1) gibt es jedenfalls eine stetige Abbildung $F : \overline{\beta(X)} \to \overline{c(X)}$ mit $F \circ \beta = c$. Das bedeutet insbesondere $F(\beta(X)) = c(X)$ und damit $\overline{F(\overline{\beta(X)})} \supseteq \overline{F(\beta(X))} = \overline{c(X)}$. Freilich ist $\overline{\beta(X)}$ kompakt, F stetig, also auch $F(\overline{\beta(X)})$ kompakt und somit im Hausdorff-Raum $\overline{c(X)}$ abgeschlossen, d.h. $\overline{F(\overline{\beta(X)})} = F(\overline{\beta(X)}) \supseteq \overline{c(X)}$, also ist F surjektiv.
Ist A eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\beta(X)}$, dann ist A laut 5.1.2 auch kompakt, darum ist $F(A)$ ebenfalls kompakt, somit als Teilmenge des Hausdorff-Raumes $\overline{c(X)}$ laut 5.1.5 abgeschlossen. Unser F ist also auch noch eine abgeschlossene Abbildung. Nun liefert 3.1.14, daß F eine Quotientenabbildung ist. □

Jeder Repräsentant dieser maximalen Klasse heißt dann *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von X.

Proposition 5.98.11. *Sei (D, δ) ein unendlicher diskreter topologischer Raum. Dann gilt für die Stone-Čech-Kompaktifizierung βD dieses diskreten Raumes*

$$|\beta D| = |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(D))| \ .$$

[3] Das heißt absolut nicht, daß wir hier ganz ohne eine Variation des Auswahlaxioms auskommen - eine solche steckt in Gestalt des Tychonoff-Satzes ziemlich tief im Fundament unserer Argumentation.

Beweis: Wir identifizieren wieder D mit seinem homöomorphen Bild in βD. Jeder Ultrafilter φ auf D konvergiert wegen der Kompaktheit von βD gegen ein Element $x_\varphi \in \beta D$. Sind φ_1, φ_2 verschiedene Ultrafilter auf D, so muß es eine Teilmenge A von D geben mit $A \in \varphi_1$ und $D \setminus A \in \varphi_2$. Nun ist die Abbildung

$$f : D \to [0,1] : f(x) := \begin{cases} 0 & ; \quad x \in A \\ 1 & ; \quad x \in D \setminus A \end{cases}$$

stetig, denn D ist ja mit diskreter Topologie δ ausgerüstet. Gemäß 5.98.10 (oder eben 5.4.8) gibt es also eine stetige Fortsetzung $F : \beta D \to [0,1]$. Aus der Stetigkeit von F und der Konvergenz unserer Ultrafilter folgt nun $F(\varphi_1) \to F(x_{\varphi_1})$ sowie $F(\varphi_2) \to F(x_{\varphi_2})$. Allerdings haben wir wegen $A \in \varphi_1$ natürlich $F(\varphi_1) = \overset{\bullet}{0}$ und wegen $D \setminus A \in \varphi_2$ haben wir $F(\varphi_2) = \overset{\bullet}{1}$, woraus unmittelbar $F(x_{\varphi_1}) = 0 \neq 1 = F(x_{\varphi_2})$ folgt. Somit muß aber auch $x_{\varphi_1} \neq x_{\varphi_2}$ gelten. Verschieden Ultrafilter auf D konvergieren also gegen verschiedene Elemente von βD. Also ist die (wegen der Hausdorff-Eigenschaft von βD wohldefinierte) Abbildung $\ell : \mathbb{U}(D) \to \beta D : \ell(\varphi) := x_\varphi$ injektiv, woraus wir $|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(D))| \stackrel{1.4.21}{=} |\mathbb{U}(D)| \leq |\beta D|$ erhalten. Zusammen mit Proposition ergibt das nun $|\beta D| = |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(D))|$. □

5.98.2 Topologischer Ascoli-Satz für relative Kompaktheit

Wir wiederholen hier - der flüssigeren Lesbarkeit wegen - ein paar Definitionen und Sachverhalte, die bereits in [0] auftauchen. Teilweise sind die Definitionen dabei etwas abgespeckt. Wir gehen diesmal nicht den Weg über die stetigen Restriktionsabbildungen, sondern gehen den Ascoli-Satz sehr direkt (dafür nicht so schön verallgemeinerbar) mit Blick auf die kompakt-offene Topologie an.

Definition 5.98.12. Ist X eine Menge, (Y, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y^X, so sagen wir $\mathcal{F}$ *konvergiert auf* Y^X *gleichmäßig gegen* $f \in Y^X$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists G \in \mathcal{F} : \forall g \in G : \forall x \in X : d(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

gilt.

Jeder gleichmäßig konvergente Filter konvergiert auch punktweise.

Die gleichmäßige Konvergenz wird durch eine Topologie beschrieben: Für $\varepsilon > 0$ sei

$$S_\varepsilon := \left\{ (f,g) \in Y^X \times Y^X \;\middle|\; \forall x \in X : d(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\} .$$

Dann ist

$$\tau_u := \left\{ \mathfrak{O} \subseteq Y^X \;\middle|\; \forall f \in \mathfrak{O} : \exists \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(f) \subseteq \mathfrak{O} \right\}$$

eine Topologie auf Y^X und die Filterkonvergenz bezüglich τ_u ist genau die gleichmäßige Konvergenz.

Definition 5.98.13. Sei X eine Menge und (Y,d) ein metrischer Raum. Ferner sei $A \subseteq X$ gegeben. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y^X, so sagen wir $\mathcal{F}$ *konvergiert gleichmäßig auf* A genau dann, wenn der Filter $\mathcal{F}_{|A} := \{F_{|A} \mid F \in \mathcal{F}\}$ mit $F_{|A} := \{f_{|A} \mid f \in F\}$, den wir aus $\mathcal{F}$ erhalten, indem wir alle Elemente von Y^X auf A einschränken, gleichmäßig in Y^A konvergiert.

Für nur eine Menge A ist das meist wenig interessant, darum fordert man zur Konstruktion spezieller Konvergenzen gern die gleichmäßige Konvergenz auf ganzen Teilmengenfamilien:

Definition 5.98.14. Ist $\mathfrak{A}$ eine Familie von Teilmengen von X, so sagen wir, ein Filter $\mathcal{F}$ *konvergiert gleichmäßig auf* $\mathfrak{A}$ genau dann wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig auf jedem Element von $\mathfrak{A}$ konvergiert.

Diese Konvergenz ist immer noch durch eine Topologie beschreibbar, die entsprechend *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf* $\mathfrak{A}$ heißt.
Für beliebiges $A \subseteq X$ und $\varepsilon > 0$ sei
$S_{A,\varepsilon} := \{(f,g) \mid f,g \in Y^X, \forall a \in A : d(f(a),g(a)) < \varepsilon\}$.
Dann ist

$$\{S_{A,\varepsilon}(f) \mid A \in \mathfrak{A}, f \in Y^X, \varepsilon > 0\}$$

eine Subbasis für den Umgebungsfilter von f bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathfrak{A}$.

Ascoli-Sätze

In diesem Abschnitt wollen wir uns kurz mit sogenannten Ascoli-Sätzen beschäftigen. Das sind ihrem Wesen nach Aussagen, die es gestatten, aus (relativer) Kompaktheit von Funktionenmengen bezüglich einer „schwachen“ Konvergenz (z.B. punktweiser) unter gewissen Bedingungen auf deren (relative) Kompaktheit bezüglich einer „stärkeren“ Konvergenz (kompakt-offener oder stetiger) zu schließen. Eine klassische Variante für relative Kompaktheit sieht z.B. so aus:

Beispiel 5.98.15. *Sei* (X,d) *ein lokalkompakter metrischer Raum,* $\mathbb{R}$ *sei ausgerüstet mit euklidischer Metrik. Für eine Teilmenge* $\mathcal{H} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ *ist genau dann der Abschluß* $\overline{\mathcal{H}}$ *kompakt (bezüglich der Supremumsmetrik) in* $C(X,\mathbb{R})$*), wenn* $\mathcal{H}$

1. *beschränkt und*

2. *gleichgradig stetig ist.*

Bemerkungen:

- Wenn wir einen metrischen Bildraum Y haben, so existiert dazu auch eine beschränkte Metrik d, welche dieselbe Topologie erzeugt. Dann ist auf Y^X die Supremumsmetrik definiert durch

$$\tilde{d}(f,g) := \sup\{d(f(x),g(x)) \mid x \in X\} \ .$$

- Wenn wir im Bildraum eine beschränkte Metrik haben, ist die Voraussetzung an eine Funktionenmenge, im Sinne der Supremumsmetrik beschränkt zu sein, natürlich albern. Man mache sich aber klar, daß die Supremumsmetrik auch in der Situation von 5.98.15 wohldefiniert ist - wegen der Kompaktheit des Urbildraumes X.

- Irgendwie fehlt uns noch eine Definition von „gleichgradig stetig“.

Definition 5.98.16. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Sei ferner $\mathcal{H} \subseteq Y^X$ eine Menge von Funktionen. $\mathcal{H}$ heißt *gleichgradig stetig an der Stelle* $x_0 \in X$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists V \in \overset{\bullet}{x_0} \cap \tau : \forall h \in \mathcal{H} : h(V) \subseteq U_\varepsilon(h(x_0))$$

gilt. $\mathcal{H}$ heißt *gleichgradig stetig* genau dann wenn $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig an allen Stellen $x_0 \in X$ ist.

Wir werden uns hier bemühen, eine *topologische Version* des Ascoli-Satzes herzuleiten, d.h. wir spielen ausschließlich mit topologischen Räumen, nicht mit metrischen. Natürlich soll der klassische Ascoli-Satz aber als Spezialfall herauskommen.

Dazu war Lemma 5.3.37 schon eine gute Vorarbeit, denn es sichert, daß wir uns hinsichtlich der wichtigen „gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta“ (die im Falle eines kompakten Urbildraumes offenbar mit der gleichmäßigen Konvergenz zusammenfällt) auf die kompakt-offene Topologie zurückziehen können, zu deren Betrachtung wir gar keine Metrik brauchen.

In der Definition von gleichgradiger Stetigkeit taucht aber eine Metrik auf - wir sollten uns also überlegen, ob wir einen dazu passenden Begriff auch ohne Metrik formulieren können. Da gleichgradige Stetigkeit im Ascoli-Satz als Voraussetzung auftritt, wäre es schön, eine solche „passende“ Eigenschaft zu finden, die aus gleichgradiger Stetigkeit *folgt*, sobald wir einen metrischen Bildraum haben. Hier ist so eine:

Definition 5.98.17. Seien $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische Räume und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}_0(X)$. Eine Teilmenge $\mathcal{H} \subseteq Y^X$ heißt gleichstetig genau dann, wenn gilt

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathcal{H}), \varphi \in \mathbb{F}(A), x \in X : (\mathcal{F}(x) \overset{\sigma}{\to} y) \wedge (\varphi \overset{\tau}{\to} x) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi) \overset{\sigma}{\to} y \ .$$

$\mathcal{H}$ heißt *gleichstetig auf einer Teilmenge* $K \subseteq X$ genau dann, wenn die Menge der Einschränkungen $\mathcal{H}_{|K} := \left\{ f_{|K} : K \to Y \;\middle|\; f \in \mathcal{H} \right\}$ gleichstetig ist.

Gleichstetigkeit ist also eine Bedingung, die „aus punktweiser Konvergenz stetige Konvergenz macht“:

Proposition 5.98.18. *Seien $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische Räume und sei $\mathcal{H}$ eine auf $A \subseteq X$ gleichstetige Teilmenge von $C(X, Y)$. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{H}$, derart, daß $\mathcal{F}$ auf A punktweise gegen $f \in Y^X$ konvergiert, so konvergiert $\mathcal{F}_{|A}$ in $C(A, Y)$ stetig gegen $f_{|A}$.*

Beweis: Die punktweise Konvergenz von $\mathcal{F}$ gegen f auf A besagt $\forall a \in A : \mathcal{F}(a) \to f(a)$. Daß $\mathcal{F}$ auf A gleichstetig ist, besagt, daß $\mathcal{F}_{|A}$ gleichstetig ist. Für jeden Filter φ auf A mit $\varphi \to a$ folgt also $\mathcal{F}_{|A}(\varphi) \to f(a) = f_{|A}(a)$. Das aber bedeutet gerade, daß $\mathcal{F}_{|A}$ stetig gegen $f_{|A}$ konvergiert. □

Lemma 5.98.19. *Seien $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topologische Räume und $\mathcal{H} \subseteq C(X,Y)$. Äquivalent sind:*

(1) $\mathcal{H}$ ist gleichstetig.

(2) Ist $x \in X$, $y \in Y$ und V eine beliebige Umgebung von y, dann existieren Umgebungen U von x und W von y derart, daß für alle $f \in \mathcal{H}$ aus $f(x) \in W$ stets $f(U) \subseteq V$ folgt.

Beweis: „(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Angenommen, (2) gälte nicht, d.h.

$$\exists x_0 \in X, y_0 \in Y, V_0 \in \overset{\bullet}{y}_0 \cap \sigma : \forall U \in \overset{\bullet}{x}_0 \cap \tau, W \in \overset{\bullet}{y}_0 \cap \sigma : \exists f_{U,W} \in \mathcal{H} : f_{U,W}(x_0) \in W \wedge f_{U,W}(U) \not\subseteq V_0 \tag{5.3}$$

Für alle $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$, $W \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$ existiert also (mindestens) ein solches $f_{U,W} \in \mathcal{H}$ mit $f(x) \in W \wedge f(U) \not\subseteq V$. Folglich sind die Teilmengen

$$F_{U,W} := \{f \in \mathcal{H} \mid f(x_0) \in W \wedge f(U) \not\subseteq V_0\}$$

von $\mathcal{H}$ alle nichtleer.

Nun ist die Familie $\mathcal{B} := \{F_{U,W} | \, U \in \overset{\bullet}{x}_0 \cap \tau, W \in \overset{\bullet}{y}_0 \cap \sigma\}$ wegen

$$\varnothing \neq F_{U_1 \cap U_2, W_1 \cap W_2} \subseteq F_{U_1,W_1} \cap F_{U_2,W_2}$$

eine Filterbasis auf $\mathcal{H}$. Sei $\mathcal{F}$ der davon erzeugte Filter.

Für alle offenen Umgebungen $W \in \overset{\bullet}{y}_0 \cap \sigma$ haben wir $F_{X,W} \in \mathcal{F}$ und $F_{X,W}(x_0) \subseteq W$, also insbesondere $W \in \mathcal{F}(x_0)$, folglich insgesamt $\mathcal{F}(x_0) \xrightarrow{\sigma} y_0$.

Ist andrerseits $U \in \overset{\bullet}{x}_0 \cap \tau$ irgendeine offene Umgebung von x_0 und $F \in \mathcal{F}$ ein beliebiges Element von $\mathcal{F}$, so existiert $F_{U',W} \in \mathcal{B}$ mit $F_{U',W} \subseteq F$, da $\mathcal{F}$ ja von $\mathcal{B}$ als Basis erzeugt wird. Wir finden $F_{U \cap U',W} \subseteq F_{U',W} \subseteq F$ sowie $F_{U \cap U',W}(U \cap U') \not\subseteq V_0$, also erst recht $F(U) \not\subseteq V_0$. Da dies für alle $U \in \overset{\bullet}{x}_0 \cap \tau$ und alle $F \in \mathcal{F}$ gilt, folgt $V_0 \notin \mathcal{F}(\underline{U}(x_0))$, mithin $\mathcal{F}(\underline{U}(x_0)) \overset{\sigma}{\not\longrightarrow} y_0$ - im Widerspruch zu (1).

„(2) $\Longrightarrow$ (1)“: Gelte (2) und sei $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$, $x \in X$, $y \in Y$ mit $\mathcal{F}(x) \to y$ gegeben. Sei ferner $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$ eine beliebige offene Umgebung von y. Dann existiert wegen (2) eine Umgebung $U \in \overset{\bullet}{x} \cap \tau$ von x und eine Umgebung $W \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$ von y derart, daß

$$\forall f \in \mathcal{H} : f(x) \in W \implies f(U) \subseteq V \tag{5.4}$$

gilt. Wegen $\mathcal{F}(x) \to y$ existiert ein Filterelement $F_W \in \mathcal{F}$ mit $F_W(x) \subseteq W$, nach (5.4) also auch $F_W(U) \subseteq V$. Da dies für alle $V \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$ gilt, erhalten wir $\mathcal{F}(\underline{U}(x)) \to y$. □

Proposition 5.98.20. *Sei (X,τ) ein topologischer und (Y,d) ein metrischer Raum. Es gelten:*

(1) Ist $\mathcal{H} \subseteq C(X,Y)$ gleichgradig stetig, dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig (und somit insbesondere gleichstetig auf jeder Teilmenge $A \subseteq X$).

(2) Ist $\mathcal{H}$ gleichstetig und ist $\mathcal{H}(x)$ relativ kompakt in Y für jedes $x \in X$, so ist $\mathcal{H}$ auch gleichgradig stetig.

Beweis: (1) Haben wir einen metrischen Bildraum (Y,d), ist weiterhin $\mathcal{H}$ gleichgradig stetig, dann ist $\mathcal{H}$ ja insbesondere an jeder Stelle $x_0 \in X$ gleichgradig stetig.

Sei nun ein Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{H}$ gegeben mit $\mathcal{F}(x_0) \to y$ und ein Filter φ auf X mit $\varphi \to x_0$, d.h. $\varphi \supseteq \underline{U}(x_0)$. Dann haben wir ja $\forall \varepsilon > 0 : \exists F \in \mathcal{F} : F(x_0) \subseteq U_\varepsilon(y)$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit existiert dann aber auch ein $U \in \underline{U}(x_0) \subseteq \varphi$ mit $\forall h \in F \subseteq \mathcal{H} : h(U) \subseteq U_\varepsilon(h(x_0) \subseteq U_{2\varepsilon}(y)$. Das ergibt $F(U) \subseteq U_{2\varepsilon}(y)$ und damit folgt $\mathcal{F}(\varphi) \to y$.
(2) Seien $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Gleichstetigkeit existieren laut 5.3.41 zu jedem $y \in Y$ offene Umgebungen U_y von x_0 und W_y von y derart, daß aus $f \in \mathcal{H}$ und $f(x) \in W_y$ stets $f(U_y) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$ folgt. Die W_y bilden eine offene Überdeckung von Y, so daß wir wegen der realtiven Kompaktheit endlich viele $y_1, ..., y_n \in Y$ finden mit $\mathcal{H}(x_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{y_i}$. Wir setzen $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$.

Für beliebiges $f \in \mathcal{H}$ haben wir nun $f(x_0) \in W_{y_k}$ für ein gewisses k, also $f(U) \subseteq f(U_{y_k}) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_k)$, also $\forall a,b \in U : d(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

$\mathcal{H}$ ist also gleichgradig stetig an der Stelle x_0. □

Proposition 5.98.21. *Seien $(X,\tau), (Y,\sigma)$ topologische Räume, Y Hausdorff, und sei $\mathcal{H}$ eine relativ kompakte Teilmenge von $C(X,Y)$ bezüglich der kompakt-offenen Topologie τ_{co}. Dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig auf allen kompakten Teilmengen von X.*

Beweis: Sei $A \subseteq X$ kompakt, $\varphi \in \mathbb{F}(A)$, $a \in A$ und $\mathcal{F} \in \mathbb{F}(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{F}(a) \to y \in Y$ und $\varphi \to a$ gegeben.
Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{F}(\varphi)$ gegen y konvergiert.

Zunächst konvergiert jeder Oberultrafilter $\mathcal{F}_0$ von $\mathcal{F}$ bezüglich τ_{co} gegen eine stetige Funktion g - wegen der relativen Kompaktheit von $\mathcal{H}$ in $C(X,Y)$. Somit folgt $y = g(a)$, wegen $\mathcal{F}_0(a) \to y$, und weil $\mathcal{F}_0$ auch punktweise gegen g konvergiert und Y Hausdorff'sch ist. Weiterhin gilt $g(\varphi) \to y = g(a) \in g(A)$ und $g(A)$ ist kompakt, also auch abgeschlossen in Y, somit ist $g(A)$ auch T_3 und Abschlüsse in $g(A)$ sind Abschlüsse in Y.

Sei nun $V_0 \in \dot{y} \cap \sigma$, dann existiert $V_1 \in \sigma$, so daß $y \in V_1 \cap g(A) \subseteq \overline{V_1 \cap g(A)} \subseteq V_0 \cap g(A)$. Ferner existiert $P_1 \in \varphi$ derart, daß $g(P_1) \subseteq V_1 \cap g(A) \subseteq \overline{V_1 \cap g(A)}$, folglich $g^{-1}(\overline{V_1 \cap g(A)}) \in \varphi$ und $g^{-1}(\overline{V_1 \cap g(A)})$ ist abgeschlossen in X. Somit ist $B := g^{-1}(\overline{V_1 \cap g(A)}) \cap A$ kompakt.

Weiter gilt $g(B) \subseteq \overline{V_1 \cap g(A)} \subseteq V_0$, d.h. $g \in (B, V_0)$, und $\mathcal{F}_0$ konvergiert bezüglich τ_{co} gegen g - also $(B, V_0) \in \mathcal{F}_0$. Wir haben auch schon $B \in \varphi$, also folgt $V_0 \in \mathcal{F}_0(\varphi)$.

Nun ist die Familie $\mathcal{E}_{V_0} := \{F \subseteq \mathcal{H} \mid \exists P \in \varphi : F(P) \subseteq V_0\}$ abgeschlossen unter endlichen Vereinigungen, weil φ abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, und wir haben gesehen, daß jeder Oberultrafilter von $\mathcal{F}$ ein Element ((B, V_0) oben) von $\mathcal{E}_{V_0}$ enthält.

Mit Lemma 1.4.10 folgt $\mathcal{F} \cap \mathcal{E}_{V_0} \neq \varnothing$, und das gilt für jedes $V_0 \in \overset{\bullet}{y} \cap \sigma$. Folglich konvergiert $\mathcal{F}(\varphi)$ gegen y. □

Wir sind jetzt gerüstet, unseren topologischen Ascoli-Satz zu beweisen.

Satz 5.98.22. *Seien $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topologische Räume, (X,τ) [schwach] lokal kompakt, (Y,σ) Hausdorff und T_3. Sei $\mathcal{H} \subseteq C(X,Y)$ gegeben und sei $C(X,Y)$ mit kompakt-offener Topologie τ_{co} ausgestattet. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{H}$ ist bezüglich τ_{co} relativ kompakt in $C(X,Y)$.

(2) (a) $\forall x \in X : \mathcal{H}(x)$ ist relativ kompakt in Y,

(b) $\mathcal{H}$ ist gleichstetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq X$.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Wegen $\tau_{co} \supseteq \tau_p$ (wobei mit τ_p natürlich die punktweise Topologie gemeint ist), ist $\mathcal{H}$ erst recht relativ kompakt in $C(X,Y)$ bezüglich τ_p, also erst recht in Y^X. Nun ist $\mathcal{H}(x)$ nichts anderes als die Projektion $\mathrm{p}_x(\mathcal{H})$, wobei $\mathrm{p}_x : \prod_{t\in X} Y_t \to Y : \mathrm{p}_x((y_t)_{t\in X}) := y_x$ die kanonische Projektion bezüglich x ist. Nach Lemma 5.2.5 ist somit $\mathcal{H}(x) = \mathrm{p}_x(\mathcal{H})$ relativ kompakt in $\mathrm{p}_x(Y^X) = Y$. Damit haben wir (2)(a).
Proposition 5.3.46 liefert direkt (2)(b).

(2) $\Longrightarrow$ (1): Wegen (2)(a) ist laut Tychonoff-Satz für relativ kompakte Mengen auch $\prod_{x\in X} \mathcal{H}(x)$ relativ kompakt in Y^X (bezüglich τ_p), erst recht also $\mathcal{H} \subseteq \prod_{x\in X} \mathcal{H}(x)$. Ist $\mathcal{F}$ ein *Ultra*filter auf $\mathcal{H}$, so konvergiert er folglich bezüglich τ_p gegen eine Funktion $g \in Y^X$. Gemäß Proposition 5.98.18 konvergiert $\mathcal{F}_{|A}$ wegen (2)(b) auf jeder kompakten Teilmenge A von X auch stetig gegen $f_{|A}$. Laut Lemma 5.3.27 konvergiert $\mathcal{F}_{|A}$ also auch im Sinne der auf A erklärten kompakt-offenen Topologie gegen $f_{|A}$.
Ist nun $K \subseteq X$ kompakt, $O \subseteq Y$ offen und $f \in (K,O)$, so folgt $f_{|K} \in (K,O)$ in der auf K erklärten kompakt-offenen Topologie. Weil darin $\mathcal{F}_{|K}$ gegen $f_{|K}$ konvergiert, folgt $(K,O) \in \mathcal{F}_{|K}$. Daraus folgt aber auch $(K,O) \in \mathcal{F}$, weil es dafür überhaupt keine Rolle spielt, was die Funktionen außerhalb von K so treiben.
Da dies für alle derartigen τ_{co}-Subbasis-Umgebungen von f gilt, folgt $\mathcal{F} \overset{\tau_{co}}{\to} f$.
Da nun (X,τ) lokal kompakt⟨4⟩ ist, konvergiert $\mathcal{F}$ stetig gegen f laut Korollar 5.3.29, so daß f laut Lemma 5.3.25 stetig ist, weil (Y,σ) ein T_3-Raum ist.
Insgesamt konvergiert also unser Ultrafilter $\mathcal{F}$ tatsächlich gegen ein $f \in C(X,Y)$.
Und weil das für alle Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{H}$ geht, ist also $\mathcal{H}$ auch bezüglich τ_{co} relativ kompakt in Y^X. □

⟨4⟩Setzen wir nur schwache lokale Kompaktheit voraus, müssen wir etwas argumentieren, statt alles mit stetiger Konvergenz zu erschlagen: Ist $x \in X$ beliebig und φ irgendein Filter auf X, der gegen x konvergiert, dann gibt es wegen der schwachen lokalen Kompaktheit immerhin eine kompakte Menge K und eine in X offene Umgebung U von x mit $U \subseteq K$. Wegen $\varphi \to x$ gilt $U \in \varphi$ und wegen $U \subseteq K$ also auch $K \in \varphi$. Dann aber folgt $f(\varphi) \overset{K\in\varphi}{=} f_{|K}(\varphi) \overset{f_{|K} \text{ stetig}}{\supseteq} \left[\left\{ V \cap K \,\middle|\, V \in f(\overset{\bullet}{x}) \cap \sigma \right\}\right] \overset{U\subseteq K}{=} \underline{U}(f(x))$, also $f(\varphi) \to f(x)$ in Y. Weil dies für alle $x \in X$ geht, ist somit f auf ganz X stetig.

Bemerkung 5.98.23. Wenn wir (starke) lokale Kompaktheit von (X, τ) voraussetzen, könnten wir statt von Relativkompaktheit bezüglich kompakt-offener Topologie τ_{co} auch von *Relativkompaktheit bezüglich stetiger Konvergenz* sprechen - wenn wir wüßten, was Relativkompaktheit bezüglich einer Konvergenzstruktur bedeuten soll. Das ist aber nicht schwer: man zieht einfach die in Lemma 5.2.2 etablierte *Charakterisierung* relativ kompakter Teilmengen durch Ultrafilterkonvergenz als *Definition* heran.

Unser klassischer Beispielsatz 5.98.15 folgt unmittelbar aus 5.98.22, weil $\mathbb{R}$ natürlich Hausdorff'sch und T_3 ist. Just weil $Y = \mathbb{R}$ ein T_3-Raum ist, ist auch $C(X, Y)$ bezüglich τ_{co} hier ein T_3-Raum (siehe Aufgabe 5.A.11.), so daß für $\mathcal{H}$ in der Situation von 5.98.22 die relative Kompaktheit tatsächlich mit der Kompaktheit des Abschlusses übereinstimmt laut Lemma 5.2.4.

Die Voraussetzungen werden entspannter, wenn wir über Kompaktheit statt Relativkompaktheit in $C(X, Y)$ reden wollen:

Satz 5.98.24. *Seien $(X, \tau), (Y, \sigma)$ topologische Räume, (Y, σ) Hausdorff. Sei $\mathcal{H} \subseteq C(X, Y)$ gegeben und sei $C(X, Y)$ mit kompakt-offener Topologie τ_{co} ausgestattet. Dann sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{H}$ ist τ_{co}-kompakt.

(2) (a) $\forall x \in X : \mathcal{H}(x)$ ist relativ kompakt in Y,

(b) $\mathcal{H}$ ist gleichstetig auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq X$,

(c) $\mathcal{H}$ ist in Y^X τ_p-abgeschlossen.

Beweis: (1) $\Longrightarrow$ (2): Da $\mathcal{H}$ kompakt ist, ist $\mathcal{H}$ erst recht relativ kompakt (in jeder beliebigen Obermenge), also folgen (2)(a) und (2)(b) sofort aus Satz 5.98.22.
Wegen $\tau_p \subseteq \tau_{co}$ ist $\mathcal{H}$ auch τ_p-kompakt, also auch τ_p-abgeschlossen in Y^X, weil mit Y auch (Y^X, τ_p) Hausdorff'sch ist. Damit haben wir (2)(c).

(2) $\Longrightarrow$ (1): Zunächst verläuft alles wie in Satz 5.98.22: Wegen (2)(a) ist laut Tychonoff-Satz für relativ kompakte Mengen (5.2.6) auch $\prod_{x \in X} \mathcal{H}(x)$ relativ kompakt in Y^X (bezüglich τ_p), erst recht also $\mathcal{H} \subseteq \prod_{x \in X} \mathcal{H}(x)$. Ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathcal{H}$, so konvergiert er folglich bezüglich τ_p gegen eine Funktion $g \in Y^X$.

Gemäß Proposition 5.98.18 konvergiert $\mathcal{F}_{|A}$ wegen (2)(b) auf jeder kompakten Teilmenge A von X auch stetig gegen $f_{|A}$. Laut Lemma 5.3.27 konvergiert $\mathcal{F}_{|A}$ also auch im Sinne der auf A erklärten kompakt-offenen Topologie gegen $f_{|A}$.
Wie oben folgt nun $\mathcal{F} \overset{\tau_{co}}{\rightrightarrows} f$.

Wegen (2)(c) gilt nun aber zudem $g \in \mathcal{H}$ (so daß wir uns um die Stetigkeit von g gar keine Sorgen machen müssen), also konvergiert $\mathcal{F}$ bezüglich τ_{co} gegen ein Element von $\mathcal{H}$. Da das für jeden Ultrafilter auf $\mathcal{H}$ gilt, ist $\mathcal{H}$ also τ_{co}-kompakt. $\square$

5.99 Neue Übungsaufgaben

Aufgabe 5.A.01. Sei (X, τ) ein lokal kompakter Raum, (Y, σ) ein Hausdorff-Raum und $f : X \to Y$ eine stetige, offene und surjektive Abbildung. Zeige, daß zu jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq Y$ eine kompakte Teilmenge $C \subseteq X$ mit $f(C) = K$ existiert.

Aufgabe 5.A.02. Sei (X, τ) ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Sei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen mit $K \subseteq U$. Zeige:

(1) Es existiert eine offene Menge V derart, daß $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ und $\overline{V}$ kompakt ist.

(2) Es existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$, die auf K konstant 1 ist und deren *Träger* $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$ kompakt und in U enthalten ist.

Aufgabe 5.A.03. Seien (X_1, τ_1) und (X_2, τ_2) lokalkompakte T_2-Räume, die nicht kompakt sind. Seien (X_i^*, τ_i^*) die zugehörigen Alexandroff-Kompaktifizierungen mit den Einbettungen $e_i : X_i \to X_i^* : e_i(x) := x$ für $i = 1, 2$. Sei ferner $f : X_1 \to X_2$ eine stetige Abbildung.

Zeige: genau dann gibt es eine stetige Abbildung $f^* : X_1^* \to X_2^*$ mit $f^*(\infty_1) = \infty_2$ und $f^* \circ e_1 = e_2 \circ f$,

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_1"'] & X_2 \arrow[d, "e_2"] \\ X_1^* \arrow[r, "f^*"] & X_2^* \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X_2$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt in X_1 ist.

Aufgabe 5.A.04.

(1) Zeige: Die einzigen zugleich offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $[0, 1]$ bezüglich euklidischer Topologie sind $\varnothing$ und $[0, 1]$.

(2) Untersuche, ob das Intervall $[0, 1]$, ausgestattet mit euklidischer Topologie, als disjunkte Vereinigung abzählbar unendlich vieler verschiedener abgeschlossener Teilmengen darstellbar ist.

Aufgabe 5.A.05. Zeige: Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn für jeden topologischen Raum (Y, σ) die Projektion $\mathrm{p}_Y : X \times Y \to Y : \mathrm{p}_Y(x, y) := y$ eine abgeschlossene Abbildung ist.

Aufgabe 5.A.06. Wir wissen ja, daß jeder Filter gleich dem Durchschnitt aller seiner Oberultrafilter ist. zuweilen muß man aber gar nicht den Durchschnitt *aller* Oberultrafilter bilden, sondern kann welche weglassen, ohne daß das am Resultat etwas ändert:

Zeige, daß jeder Umgebungsfilter $\underline{U}(x)$ in $\mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie τ_e einen Oberultrafilter ψ derart hat, daß

$$\underline{U}(x) = \bigcap_{\varphi \in \mathbb{U}(\underline{U}(x)) \setminus \{\psi\}} \varphi$$

gilt, d.h. daß der Durchschnitt über alle *übrigen* Oberultrafilter von $\underline{U}(x)$ bereits gleich $\underline{U}(x)$ ist.
Bemerkung: Offenbar kann man jedenfalls $\overset{\bullet}{x}$ *nicht* weglassen.
Hinweis: Es kann hier nützlich sein, etwas über die Mächtigkeit von $\mathbb{U}(\mathbb{R})$ zu wissen - und dies mit Kenntnissen über Trennungseigenschaften und Kompaktheit zu verbinden.

Aufgabe 5.A.07. Sei (X, τ) ein Tychonoff-Raum und (e', X') eine T_2-Kompaktifizierung von (X, τ) derart, daß für jede stetige Abbildung $f : X \to [0, 1]$ von X in das mit euklidischer Topologie ausgestattete Intervall $[0, 1]$ eine stetige Fortsetzung $F : X' \to [0, 1]$ existiert, d.h. $f = F \circ e'$. Zeige, daß dann (e', X') äquivalent zur Stone Čech-Kompaktifizierung $(\beta, \overline{\beta(X)})$ ist.

Aufgabe 5.A.08. **Zeige:** Jede unendliche abgeschlossene Teilmenge der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ von $\mathbb{N}$ (wobei $\mathbb{N}$ mit diskreter Topologie versehen sei) enthält einen zu $\beta\mathbb{N}$ homöomorphen Teilraum.
Hinweis: [0], Kap. 4, Aufgabe 6 (S.115)

Aufgabe 5.A.09.
Sei (X, τ) ein Tychonoff-Raum und $(\beta, \overline{\beta(X)})$ seine Stone-Čech-Kompaktifizierung. Zeige, daß für jede zugleich offene und abgeschlossene Teilmenge C von X auch $\overline{\beta(C)}$ zugleich offen und abgeschlossen in $\overline{\beta(X)}$ ist.

Aufgabe 5.A.10. Sei X eine Menge und (Y, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathfrak{A}$ eine Familie von Teilmengen von X. Zeige, daß die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathfrak{A}$ durch eine Topologie beschreibbar ist.

Aufgabe 5.A.11. Zeige: Wenn (X, τ) ein lokalkompakter und (Y, σ) ein T_3-Raum ist, dann ist auch $C(X, Y)$, versehen mit kompakt-offener Topologie τ_{co}, ein T_3-Raum.

5.100 Lösungsvorschläge

Lösungsvorschlag 5.A.01.:
Ist $K \subseteq Y$ kompakt, so im Hausdorff-Raum Y auch abgeschlossen. Daher ist wegen der Stetigkeit von f auch $f^{-1}(K)$ abgeschlossen in X.
Nun ist X lokalkompakt, d.h. speziell zu jedem $x \in f^{-1}(K)$ gibt es eine offene Teilmenge U_x und eine kompakte Teilmenge L_x von X mit $x \in U_x \subseteq L_x$.
Wegen der Offenheit und Surjektivität von f ist folglich die Familie $\{f(U_x)|\ x \in f^{-1}(K)\}$ eine offene Überdeckung von K. Daher gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{f(U_{x_1}), ..., f(U_{x_n})\}$, d.h. $\bigcup_{i=1}^n f(U_{x_i}) \supseteq K$. Erst recht gilt also $f\left(\bigcup_{i=1}^n L_{x_i}\right) = \bigcup_{i=1}^n f(L_{x_i}) \supseteq K$. Nun ist $\bigcup_{i=1}^n L_{x_i}$ als endliche Vereinigung kompakter Mengen selbst kompakt, daher wegen der Abgeschlossenheit von $f^{-1}(K)$ auch $C := f^{-1}(K) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n L_{x_i}\right)$ und offenbar gilt nun $f(C) = K$. $\square$

Lösungsvorschlag 5.A.02.:
(1) Wir betrachten die Alexandroff-Kompaktifizierung (X^*, τ^*) von (X, τ). Da (X, τ) lokalkompakt und T_2 ist, ist auch (X^*, τ^*) ein T_2-Raum und natürlich kompakt - also auch T_4. Als kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist freilich K auch in X^* abgeschlossen. Wegen T_4 existiert laut 4.4.11 also eine offene Teilmenge V von X^* mit $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. (Beachte, daß U auch in X^* offen ist!) Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X^* ist unser $\overline{V}$ kompakt - und wegen $\overline{V} \subseteq U$ liegt der hinzugefügte Punkt $\{\infty\}$ nicht in $\overline{V}$, d.h. $\overline{V}$ ist eine ganz normale Teilmenge von X, wie gewünscht.

(2) Auch hier arbeiten wir wieder in der Alexandroff-Kompaktifizierung (X^*, τ^*), die ja T_4 erfüllt. Wir benutzen unser in (1) gewonnenenes V. Da V offen ist, ist $X \setminus V$ abgeschlossen und es gilt $K \cap (X \setminus V) = \varnothing$. Das Urysohn-Lemma schenkt uns also eine stetige Funktion $f^* : X^* \to [0, 1]$, die auf K überall den Wert 1 annimmt und auf $X \setminus V$ überall den Wert 0. Von 0 verschiedene Werte nimmt f^* also höchstens auf V an. Wir wollen aber eine Funktion f von X nach $[0, 1]$, nicht eine von X^* nach $[0, 1]$ - bitte, hier ist sie: $f := (f^*)_{|X}$, die Einschränkung von f^* auf X, die natürlich auch stetig ist. Auch f nimmt somit höchstens auf V von 0 verschiedene Werte an, d.h. $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subseteq V$ und folglich $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V}$. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge $\overline{V}$ ist unser $\mathrm{supp}(f)$ natürlich auch kompakt. $\square$

Lösungsvorschlag 5.A.03.:
Wenn es eine stetige Fortsetzung f^* mit $f^*(\infty_1) = \infty_2$ gibt und K eine kompakte Teilmenge von X_2 ist, dann ist K in X_2^* auch abgeschlossen, wegen der Stetigkeit von f^* ist also $(f^*)^{-1}(K)$ abgeschlossen in X_1^* und darum kompakt. Wegen $f^*(\infty_1) = \infty_2$ haben wir $\infty_1 \notin (f^*)^{-1}(K)$,

also $(f^*)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \subseteq X_1$.

Sei nun $f^{-1}(K)$ kompakt für jedes kompakte K. Wir setzen natürlich

$$f^* : X_1^* \to X_2^* : f^*(x) := \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in X_1 \\ \infty_2 & ; \quad x = \infty_1 \end{cases}$$

und müssen nun überprüfen, daß f^* stetig ist. Offen in X_2^* sind zunächst einmal die in X_2 offenen Mengen - deren Urbilder unter f^* sind aber gerade ihre Urbilder unter f, also offen wegen der stetigkeit von f. Zusätzlich sind nun noch die Komplemente in X_2^* der kompakten Teilmengen K von X_2, für diese gilt:

$$f^*(X_2^* \setminus K) = X_1^* \setminus f^{-1}(K) \ ,$$

was jedenfalls dann offen in X_1^* ist, wenn $f^{-1}(K)$ kompakt ist - aber das hatten wir ja vorausgesetzt. Mithin ist f^* stetig. □

Lösungsvorschlag 5.A.04.:
(1) Sei $A \subseteq [0,1]$ zugleich offen und abgeschlossen bezüglich euklidischer Topologie.
Falls $\varnothing \neq A$, so existiert $a := \inf\{x \in [0,1] \mid x \in A\}$ und wegen der Abgeschlossenheit von A gilt $a \in A$. Aus $A = \mathrm{int}(A)$ folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$ mit $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap [0,1] \subseteq A$, also $a = 0$, weil sonst $\max\{a - \frac{\varepsilon}{2}, 0\} \in A$ gälte - im Widerspruch zur Infimumseigenschaft von a. Wir haben also $0 \in A$.
Gilt zusätzlich $A \neq [0,1]$, so folgt $B := [0,1] \setminus A \neq \varnothing$ und B ist ebenfalls zugleich offen und abgeschlossen. Ganz wie oben folgt dann aber $0 \in B$ - Widerspruch.

(2) Nein, ist es nicht. Um das einzusehen, gehen wir indirekt vor und verwenden den Satz von Baire 5.3.10.
Angenommen, es gäbe eine abzählbare Familie $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ paarweise disjunkter euklidisch abgeschlossener Teilmengen von $[0,1]$ mit $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann definieren wir für jede Teilmenge A von $[0,1]$ deren „Rand“ als

$$\mathrm{rd}(A) := \overline{A} \setminus \mathrm{int}(A) \ .$$

Für unsere ohnehin abgeschlossenen A_n vereinfacht sich das zu $\mathrm{rd}(A_n) = A \setminus \mathrm{int}(A_n)$. Nun bilden wir

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{rd}(A_n) \ .$$

1. B ist abgeschlossen in $[0,1]$, denn weil $[0,1]$ disjunkte Vereinigung der A_n ist, haben wir

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus \mathrm{int}(A_n)) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(A_n) = [0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(A_n)$$

und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}(A_n)$ ist als Vereinigung von offenen Mengen offen.

2. Als abgeschlossene Teilmenge des lokalkompakten Raumes $[0,1]$ (euklidisch) ist also auch B lokalkompakt.

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $B \setminus \mathrm{rd}(A_n)$ dicht in B. Ist nämlich O irgendeine nichtleere offene Teilmenge von B, enthält O also ein Element x und es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap B \subseteq O$.

   Liegt x in $B \setminus \mathrm{rd}(A_n)$, sind wir fertig, denn dann hat ja $B \setminus \mathrm{rd}(A_n)$ offenbar einen nichtleeren Schnitt mit O. Angenommen also, wir hätten $x \in \mathrm{rd}(A_n)$.

   Da nicht das volle euklidische Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ unterhalb von $\mathrm{rd}(A_n)$ liegen kann (sonst wäre speziell x Element von $\mathrm{int}(A_n)$, also gerade nicht von $\mathrm{rd}(A_n)$), existiert also ein $m \neq n$ mit einem $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A_m$. Natürlich gilt $y \neq x$, sei also o.B.d.A. $y > x$. Dann sei $i := \inf\{t \in [0,1] \mid x \leq t,\ t \in A_m\}$. Wegen der Abgeschlossenheit von A_m haben wir $i \in A_m$, also $i \neq x \in A_n$ und nach Konstruktion folglich $i > x$. Freilich ist i kein innerer Punkt von A_m, da wegen der Infimumseigenschaft $[x, i) \cap A_m = \varnothing$ gilt, so daß A_m keine offene Umgebung von i umfaßt. Somit liegt i in $\mathrm{rd}(A_m)$, also auch in $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (B \setminus \mathrm{rd}(A_n)) \subseteq O \cap (B \setminus \mathrm{rd}(A_n))$. Dies für alle nichtleeren offenen Teilmengen O von B liefert Dichtheit von $B \setminus \mathrm{rd}(A_n)$ in B.

4. Da jedes $\mathrm{rd}(A_n)$ als Differenz aus der abgeschlossenen Menge A_n und der offenen Menge $\mathrm{int}(A_n)$ abgeschlossen in $[0,1]$ ist, sind alle Komplemente $[0,1] \setminus \mathrm{rd}(A_n)$ offen in $[0,1]$. Folglich ist jedes $B \setminus \mathrm{rd}(A_n)$ offen in B.

5. Da B lokalkompakter Hausdorff-Raum ist, folgt mit dem Satz von Baire, daß

   $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B \setminus \mathrm{rd}(A_n)) = B \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{rd}(A_n) = B \setminus B = \varnothing$$

   ebenfalls dicht in B ist - was nur dann ginge, wenn $B = \varnothing$ gälte.

6. Aus $B = \varnothing$ würde $A_n = \mathrm{int}(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgen.
   Die Bedingung $A_n = \mathrm{int}(A_n)$ ist aber - da die A_n ja als abgeschlossen vorausgesetzt sind - nur für $A_n = \varnothing$ bzw. $A_n = [0,1]$ erfüllt. Diese beiden bilden aber nun wirklich keine unendliche Familie paarweise disjunkter Mengen.

$\square$

Lösungsvorschlag 5.A.05.:
Sei (X, τ) kompakt und (Y, σ) irgendein topologischer Raum. Sei ferner $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen bezüglich Produkttopologie. Wir wollen zeigen, daß $\mathrm{p}_Y(A)$ abgeschlossen ist. Sei dazu $y_0 \in (X \times Y) \setminus \mathrm{p}_Y(A)$ beliebig. Nun bedeutet $y_0 \notin \mathrm{p}_Y(A)$, daß für alle $x \in X$ gilt $(x, y_0) \notin A$, d.h.

$(x, y_0) \in (X \times Y) \setminus A$. nun ist ja A abgeschlossen, also $X \setminus A$ offen. Daher muß es zu jedem $x \in X$ eine offene Menge der Standardbasis der Produkttopologie geben, die (x, y_0) enthält und ganz unterhalb von $(X \times Y) \setminus A$ liegt. D.h. es existieren $U_x \in \tau$ und $V_x \in \sigma$ mit $x \in U_x$, $y_0 \in V_x$ und $U_x \times V_x \subseteq (X \times Y) \setminus A$. Die Familie $\{U_x \mid x \in X\}$ ist eine offene Überdeckung, so daß es wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{x_1}, ..., U_{x_n}\}$ gibt. Wir setzen $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \in \sigma$. Dann gilt für jedes Element $y \in V : \forall x \in X : (x, y) \in (X \times Y) \setminus A$, also $y \in (X \times Y) \setminus \mathrm{p}_Y(A)$, d.h. $V \subseteq (X \times Y) \setminus \mathrm{p}_Y(A)$. Dies geht für alle $y_0 \in (X \times Y) \setminus \mathrm{p}_Y(A)$, also ist $(X \times Y) \setminus \mathrm{p}_Y(A)$ offen und somit $\mathrm{p}_Y(A)$ abgeschlossen.

Sei nun für jeden topologischen Raum (Y, σ) die Projektion p_Y eine abgeschlossene Abbildung. Sei ferner φ ein Ultrafilter auf X. Wir setzen $Y := X \cup \{\infty\}$ mit einem Element ∞, das nicht Element von X ist. Nun brauchen wir noch eine Topologie auf Y. Wir nehmen

$$\sigma := \mathfrak{P}(X) \cup \{P \cup \{\infty\} \mid P \in \varphi\} \ .$$

Nun betrachten wir die Teilmenge $D := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$. Da $\mathrm{p}_Y(D) = X \subseteq Y$ nicht abgeschlossen in Y ist, kann D nicht abgeschlossen in $X \times Y$ sein. Stetigkeit von p_Y liefert $\mathrm{p}_Y(\overline{D}) \subseteq \overline{\mathrm{p}_Y(D)}$, und natürlich gilt $\mathrm{p}_Y(D) \subseteq \mathrm{p}_Y(\overline{D})$, also $\overline{\mathrm{p}_Y(D)} \subseteq \overline{\mathrm{p}_Y(\overline{D})}$, woraus mit der Abgeschlossenheit von $\mathrm{p}_Y(\overline{D})$ nun $\mathrm{p}_Y(\overline{D}) = \overline{\mathrm{p}_Y(D)}$ folgt.

Da der von φ auf Y induzierte Filter offenbar gegen ∞ konvergiert und die Teilmenge $X \subseteq Y$ enthält, haben wir $\infty \in \overline{\mathrm{p}_Y(D)} = \mathrm{p}_Y(\overline{D})$, so daß es ein Element $(x_0, \infty) \in \overline{D}$ geben muß. Das bedeutet, daß jede offene Basismenge $O \times (P \cap \{\infty\})$ mit $O \in \dot{x}_0$ und $P \in \varphi$ unser D nichtleer schneidet. Nun bedeutet $(x, x) \in D \cap (O \times (P \cap \{\infty\}))$ gerade $x \in O \cap (P \cup \{\infty\}) = O \cap P$, so daß wir $O \cap P \neq \varnothing$ für jede offene Umgebung O von x_0 und für alle $P \in \varphi$ haben, also $O \in \varphi$. Das aber bedeutet $\varphi \xrightarrow{\tau} x_0$.

Da das für jeden Ultrafilter φ auf X geht, ist X kompakt. □

Lösungsvorschlag 5.A.06.:

(a) Wir überlegen uns zunächst einmal, daß für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ stets $|\mathbb{U}\,(\underline{U}(x))| = |\mathbb{U}\,(\underline{U}(y))|$ gilt, weil es eine sehr naheliegende Bijektion von $\mathbb{R}$ auf sich selbst gibt, die $\underline{U}(x)$ auf $\underline{U}(y)$ abbildet.

(b) Sei $0 < p < 1$. Betrachten wir den Umgebungsfilter $\underline{U}(p)_{|[0,1]}$ von p in $[0, 1]$, so stellen wir fest, daß jedem seiner Oberultrafilter (auf $[0, 1]$) eindeutig ein Oberultrafilter des Umgebungsfilters $\underline{U}(p)$ in $\mathbb{R}$ entspricht und umgekehrt: jeder Oberultrafilter von $\underline{U}(p)$ auf $\mathbb{R}$ enthält $[0, 1]$ als Element (für $0 < p < 1$). Das liefert $\left|\mathbb{U}\left(\underline{U}(p)_{|[0,1]}\right)\right| = |\mathbb{U}\,(\underline{U}(p))|$.

(c) Für $p = 0$ bzw. $p = 1$ erzeugt imerhin noch jeder Oberultrafilter von $\underline{U}(p)_{|[0,1]}$ auf $[0,1]$ als Basis einen eindeutig bestimmten Ultrafilter auf $\mathbb{R}$, der den Umgebungsfilter $\underline{U}(p)$ von p auf $\mathbb{R}$ umfaßt. Das liefert $\left|\mathbb{U}\left(\underline{U}(p)_{|[0,1]}\right)\right| \leq |\mathbb{U}(\underline{U}(p))|$ für $p = 0$ bzw. $p = 1$.

(d) $[0,1]$ ist bezüglich euklidischer Topologie kompakt, also konvergiert *jeder* Ultrafilter auf $[0,1]$, d.h. jeder Ultrafilter auf $[0,1]$ umfaßt einen Umgebungsfilter, und zwar - weil $[0,1]$ auch noch ein T_2-Raum ist - *genau* einen.

Das heißt, die Menge $\mathbb{U}([0,1])$ aller Ultrafilter auf $[0,1]$ ist gleich der (disjunkten) Vereinigung aller $\mathbb{U}\left(\underline{U}(p)_{|[0,1]}\right)$, $p \in [0,1]$.

(e) Ist p irgendein Element von $\mathbb{R}$, so folgt aus (a) - (d):

$$|\mathbb{U}([0,1])| \leq |\ [0,1] \times \mathbb{U}(\underline{U}(p))\ | \ ,$$

also (siehe Satz 1.3.9)

$$|\mathbb{U}([0,1])| \leq \max\{|\ [0,1]\ |,\ |\mathbb{U}(\underline{U}(p))|\} \ ,$$

d.h. laut Satz 1.4.21

$$|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}([0,1]))| \leq \max\{|\ [0,1]\ |,\ |\mathbb{U}(\underline{U}(p))|\} \ .$$

Da nun $|\ [0,1]\ |$ ganz gewiß echt kleiner als $|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}([0,1]))|$ ist, folgt $|\mathfrak{P}(\mathfrak{P}([0,1]))| \leq |\mathbb{U}(\underline{U}(p))|$, also in von Satz 1.4.21

$$|\mathbb{U}(\underline{U}(p))| = |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}([0,1]))| = |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R}))| \ .$$

(f) Nach dieser etwas länglichen Vorbetrachtung⟨5⟩ kommen wir nun zur erfreulich kurzen Hauptsache. Sei ψ ein Oberultrafilter von $\underline{U}(p)$ in $(\mathbb{R}, \tau_{euklid})$; wir bezeichnen mit

$$\mathfrak{D}_\psi := \bigcap_{\varphi \in \mathbb{U}(\underline{U}(p)) \setminus \{\psi\}} \varphi$$

den Durchschnitt aller *anderen* Oberultrafilter von $\underline{U}(p)$, außer ψ.

Wenn nun $\mathfrak{D}_\psi \neq \underline{U}(p)$ gilt, so heißt das natürlich $\underline{U}(p) \subsetneq \mathfrak{D}_\psi$. Das bedeutet, es gibt eine Teilmenge A_ψ von $\mathbb{R}$, die Element von $\mathfrak{D}_\psi$ ist, aber nicht von $\underline{U}(p)$. Folglich ist A_ψ nicht Element von ψ, so daß notwendigerweise $\mathbb{R} \setminus A_\psi$ Element von ψ ist, während alle anderen Oberultrafilter die Menge A_ψ und darum *nicht* $\mathbb{R} \setminus A_\psi$ als Element haben. Das bedeutet: ψ ist der einzige Oberultrafilter von $\underline{U}(p)$, der $\mathbb{R} \setminus A_\psi$ als Element hat.

Wir können also jedem Oberultrafilter ψ, für den $\mathfrak{D}_\psi \neq \underline{U}(p)$ gilt, *eineindeutig* eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ zuordnen, die er „exklusiv" enthält.
Das heißt, mit $H := \{\psi \in \mathbb{U}(\underline{U}(p)) \mid \mathfrak{D}_\psi \neq \underline{U}(p)\}$ ist die Abbildung $i : H \to \mathfrak{P}(\mathbb{R}) : i(\psi) := (\mathbb{R} \setminus A_\psi)$ injektiv. Es folgt $|H| \leq |\mathfrak{P}(\mathbb{R})| \lneq |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{R}))| = |\mathbb{U}(\underline{U}(p))|$, also notwendigerweise $H \subsetneq \mathbb{U}(\underline{U}(p))$.

⟨5⟩ Wir haben dabei im Grunde nur gezeigt, daß die Familie der gegen einen bestimmten Punkt p konvergierenden Ultrafilter gleichmächtig zur Familie aller Ultrafilter auf $\mathbb{R}$ ist.

$\square$

Lösungsvorschlag 5.A.07.:
Wenn wir zeigen können, daß jede stetige Abbildung $g : X \to Y$ in einen kompakten Hausdorfraum (Y, σ) eine stetige Fortsetzung $G : X' \to Y$ mit $g = G \circ e'$ hat, sind wir fertig - denn dann liefert Teil (2) des Satzes von Stone Čech die Äquivalenz von (e', X') zu $(\beta, \overline{\beta(X)})$.
Sei also (Y, σ) kompakter Hausdorff-Raum und $g : X \to Y$ stetig. Wir betten Y via e_Y in $\prod_{j\in C(Y,[0,1])}[0,1]_j$ ein und betrachten mal die kanonischen Projektionen $p_k : \prod_{j\in C(Y,[0,1])}[0,1]_j \to [0,1]_k$, die natürlich alle stetig sind. Für jede von ihnen ist also $p_k \circ g$ eine stetige Abbildung von X nach $[0,1]$. Laut unserer Voraussetzung gibt es für diese nun jeweils eine stetige Fortsetzung $G_k : X' \to [0,1]$ mit $p_k \circ g = G_k \circ e'$. Laut Einbettungslemma ist darum auch die Funktion

$$F : X' \to \prod_{j\in\mathfrak{C}(Y)} [0,1]_j : F(x) := (G_j(x))_{j\in\mathfrak{C}(Y)}$$

stetig und erfüllt offenbar $e_Y \circ g = F \circ e'$. Wegen der Stetigkeit von F finden wir $F(X') = F(\,\overline{e'(X)}\,) \subseteq \overline{F(e'(X))} = \overline{e_Y \circ g(X)} \subseteq \overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$, da ja $e_Y(Y)$ als bereits kompakte Teilmenge von $\prod_{j\in C(Y,[0,1])}[0,1]_j$ auch schon abgeschlossen ist. Somit ist e_Y^{-1} auf $F(X')$ definiert und wir setzen natürlich $G := e_Y^{-1} \circ F$, was uns $G \circ e' = e_Y^{-1} \circ F \circ e' = e_Y^{-1} \circ e_Y \circ g = g$ liefert - wie gewünscht. $\square$

Lösungsvorschlag 5.A.08.:
Sei A eine unendliche abgeschlossene Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$. Ganz analog wie in (der Lösung von) [0], Kap. 4, Aufgabe 6 (S.115) beschaffen wir uns eine abzählbar unendliche Familie $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ paarweise disjunkter, nichtleerer in $\beta\mathbb{N}$ offener Teilmengen mit jeweils einem Element $k_i \in A \cap U_i$.[6] Wir setzen $K := \{k_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Unser K ist natürlich als Teilraum diskret.
Sei nun $f : K \to [0,1]$ irgendeine (wegen Diskretheit von K automatisch stetige) Funktion von K nach $[0,1]$. Wir definieren

$$g : \mathbb{N} \to [0,1] : g(n) := \begin{cases} f(k_i) & ; \quad \beta(n) \in U_i \\ 0 & ; \quad \beta(n) \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \end{cases}$$

Diese Funktion ist natürlich stetig, wenn wir $\mathbb{N}$ mit diskreter Topologie ausrüsten und hat darum eine stetige Fortsetzung $G : \beta\mathbb{N} \to [0,1]$. Nun ist $\beta(\mathbb{N})$ dicht in $\beta\mathbb{N}$, so daß für jedes $x \in \overline{U_i} = \overline{U_i \cap \beta(\mathbb{N})}$ folgt: $G(x) = f(k_i)$. Insbesondere ist $G_{|K} = f$. Es existiert also für jedes derartige $f : K \to [0,1]$ eine stetige Fortsetzung $F := G_{|\overline{K}} : \overline{K} \to [0,1]$ auf die *Kompaktifizierung* $\overline{K}$ von

[6] Das Verfahren aus H03.3 braucht man nur geringfügig anzupassen: man wählt $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ aus $X_n \cap A$ und unterscheidet bei der Festlegung von X_{n+1}, ob $U_{n+1} \cap X_n \cap A$ bzw. $U_{n+1} \cap X_n \cap A$ unendlich ist oder nicht. Aus jedem U_i wählen wir dann einfach ein $k_i \in U_i \cap A$ aus.

K. Wie wir aus Aufgabe 5.A.07. wissen, folgt daraus, daß $\overline{K}$ homöomorph zu βK ist. Freilich ist K homöomorph zu $\mathbb{N}$, also haben wir $\beta\mathbb{N} \cong \beta K \cong \overline{K} \subseteq \overline{A} = A$. □

Lösungsvorschlag 5.A.09.:
Wenn C zugleich offen und abgeschlossen ist, gilt das natürlich auch für $X \setminus C$, speziell sind also beide offen, so daß die Abbildung

$$f : X \to D_2 : f(x) := \begin{cases} 0 & ; \quad x \in C \\ 1 & ; \quad x \in X \setminus C \end{cases}$$

von X in den zweipunktigen diskreten Raum $D_2 = \{0, 1\}$ stetig ist. Laut Satz von Stone-Čech gibt es also eine stetige Fortsetzung $F : \beta X \to D_2$, d.h. $F \circ \beta = f$. Für jedes $z \in \overline{\beta(C)}$ gibt es einen Filter φ auf C, derart, daß $\beta(\varphi)$ gegen z konvergiert. Aus $C \in \varphi$ folgt nun $F(\beta(\varphi)) = f(\varphi) = \dot{0} \to 0$, also wegen der Stetigkeit von F auch $F(z) = 0$. Insgesamt haben wir somit

$$F(\overline{\beta(C)}) \subseteq \{0\} \ . \tag{5.6}$$

Analog gibt es für jedes $z \in \overline{\beta(X \setminus C)}$ einen Filter φ auf $(X \setminus C)$, derart, daß $\beta(\varphi)$ gegen z konvergiert. Aus $(X \setminus C) \in \varphi$ folgt nun $F(\beta(\varphi)) = f(\varphi) = \dot{1} \to 1$, also wegen der Stetigkeit von F auch $F(z) = 1$. Insgesamt haben wir somit

$$F(\overline{\beta(X \setminus C)}) \subseteq \{1\} \ . \tag{5.7}$$

Aus (5.6) und (5.7) folgt nun sofort $\overline{\beta(X \setminus C)} \cap \overline{\beta(C)} = \varnothing$. □

Lösungsvorschlag 5.A.10.:
Für $A \in \mathfrak{A}$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir jeweils $S_{A,\varepsilon} := \big\{(f,g) \;\big|\; f,g \in Y^X, \forall a \in A : d(f(a),g(a)) < \varepsilon\big\}$. Wir könnten jetzt einfach alle derartigen ε-Schlauch-Stückchen als Subbasis einer Topologie hernehmen (und für den wichtigen Fall, daß mit $\mathfrak{A}$ die Familie aller kompakten Mengen gemeint ist, ginge das auch ausgezeichnet konform mit unseren Absichten), wir sind aber ein bißchen zurückhaltender, denn wir müssen ja nicht ohne Not alle diese Mengen selbst für offen erklären. Stattdessen bilden wir unsere Topologie $\tau_{u\mathfrak{A}}$ indem wir setzen

$$\mathfrak{O} \in \tau_{u\mathfrak{A}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathfrak{O} \subseteq Y^X \ \wedge \ \forall f \in \mathfrak{O} : \exists A_1, ..., A_n \in \mathfrak{A}, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+ : \bigcap_{i=1}^{n} S_{A_i,\varepsilon_i}(f) \subseteq \mathfrak{O} \ .$$

Daß somit $\varnothing$ und Y^X zu $\tau_{u\mathfrak{A}}$ gehören, ist klar. Auch, daß beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\tau_{u\mathfrak{A}}$ wieder zu $\tau_{u\mathfrak{A}}$ gehören, erschließt sich sofort. Und selbst die endlichen Durchschnitte machen keine Probleme, denn für $\mathfrak{O}_1, ..., \mathfrak{O}_m \in \tau_{u\mathfrak{A}}$ finden wir:

$$\begin{aligned}
\forall f \in \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{O}_k \quad &\Longrightarrow \quad \forall k = 1, ..., m : \exists A_{k,1}, ..., A_{k,n_k} \in \mathfrak{A}, \varepsilon_{k,1}, ..., \varepsilon_{k,n_k} \in \mathbb{R}^+ : \bigcap_{i=1}^{n_k} S_{A_{k,i},\varepsilon_{k,i}}(f) \subseteq \mathfrak{O}_k \\
&\Longrightarrow \quad f \in \bigcap_{k=1}^{m} \bigcap_{i=1}^{n_k} S_{A_{k,i},\varepsilon_{k,i}}(f) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{O}_k \\
&\Longrightarrow \quad \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{O}_k \in \tau_{u\mathfrak{A}} \ .
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir natürlich noch zeigen, daß Konvergenz bezüglich $\tau_{u\mathfrak{A}}$ genau die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathfrak{A}$ ist.

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y^X, der auf $\mathfrak{A}$ gleichmäßig gegen $f \in Y^X$ konvergiert. Ist nun $\mathfrak{O} \in \tau_{u\mathfrak{A}}$ mit $f \in \mathfrak{O}$, so existieren also $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{A}, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ mit $\bigcap_{i=1}^n S_{A_i,\varepsilon_i}(f) \subseteq \mathfrak{O}$. Nach Definitionen 5.98.13, 5.98.12 gibt es nun für jedes $i = 1, ..., n$ ein $G_i \in \mathcal{F}$ mit $G_i \subseteq S_{A_i,\varepsilon_i}$. Da nunmal $\mathcal{F}$ ein Filter ist, folgt $\mathcal{F} \ni \bigcap_{i=1}^n G_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n S_{A_i,\varepsilon_i} \subseteq \mathfrak{O}$, also auch $\mathfrak{O} \in \mathcal{F}$. Da dies für alle $\mathfrak{O} \in \tau_{u\mathfrak{A}}$ mit $f \in \mathfrak{O}$ gilt, konvergiert $\mathcal{F}$ auch bezüglich $\tau_{u\mathfrak{A}}$ gegen f.

Sei nun $\mathcal{F}$ ein Filter auf Y^X, der bezüglich $\tau_{u\mathfrak{A}}$ gegen $f \in Y^X$ konvergiert.
Wir sehen uns die „Schlauchstückchen“ mal etwas näher an. Zwar haben wir sie nicht per se für offen erklärt (im allgemeinen werden sie das auch nicht sein), aber sie haben ein nichtleeres Inneres, in dem auch wieder ein „Schlauchstückchen“ enthalten ist: Sei

$$I_{A,\varepsilon} := \{h \in S_{A,\varepsilon}(f) \mid \exists \delta > 0 : S_{A,\delta}(h) \subseteq S_{A,\varepsilon}(f)\} \ .$$

Dann ist $I_{A,\varepsilon}$ offen und es gilt

$$S_{A,\frac{\varepsilon}{3}}(f) \subseteq I_{A,\varepsilon} \subseteq S_{A,\varepsilon}(f) \ . \tag{5.8}$$

Sind nun $A \in \mathfrak{A}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, so muß $I_{A,\varepsilon}$ wegen seiner Offenheit Element von $\mathcal{F}$ sein. Nun haben wir tatsächlich $\forall g \in I_{A,\varepsilon} : \forall a \in A : d(f(a), g(a)) < \varepsilon$. Dies für alle A, ε besagt gerade nach Definitionen 5.98.13, 5.98.12, daß $\mathcal{F}$ auf $\mathfrak{A}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Den Teil $S_{A,\frac{\varepsilon}{3}}(f) \subseteq I_{A,\varepsilon}$ in (5.8) haben wir übrigens einerseits deshalb mit aufgeschrieben, weil er deutlich macht, daß unsere Funktion f auch wirklich in $I_{A,\varepsilon}$ liegt - aber vor allem, weil dadurch nochmal klar wird, daß die Familie der $S_{A,\varepsilon}(f)$ tatsächlich eine Umgebungssubbasis für f ist. □

Lösungsvorschlag 5.A.11.:
Wir verwenden, daß ein topologischer Raum genau dann T_3 ist, wenn jeder Umgebungsfilter

darin eine Basis aus abgeschlossenen Mengen hat (Lemma 4.4.2).
Dazu überlegen wir uns weiter, daß es dafür ausreicht, wenn es für jeden Umgebungsfilter eine Filtersubbasis derart gibt, daß unterhalb jedes Subbasiselementes eine abgeschlossene Umgebung liegt: aus einer Subbasis $\underline{S}$ erhalten wir ja eine Basis $\underline{B_{\underline{S}}}$, indem wir alle endlichen Durchschnitte von Elementen von $\underline{S}$ hinzunehmen. Ist nun also $\underline{S}$ eine Subbasis des Umgebungsfilters von x und $U := \bigcap_{i=1}^n S_i$ mit $S_i \in \underline{S}$ so ein Element von $\underline{B_{\underline{S}}}$ sowie zu jedem S_i eine abgeschlossene Umgebung $x \in A_i \subseteq S_i$ gegeben, dann folgt ja $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n S_i$ und $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ist wiederum eine abgeschlossene Umgebung von x. Weil $\underline{B_{\underline{S}}}$ eine Basis ist, bilden nun also die endlichen Durchschnitte der zu den $S \in \underline{S}$ gehörigen abgeschlossenen Umgebungen $A \subseteq S$ auch eine Basis des Umgebungsfilters von x.

Sei nun also $f \in C(X,Y)$ gegeben und (K,O), K kompakte Teilmenge von X und O offene Teilmenge von Y, ein Element der definierenden Subbasis von τ_{co} mit $f \in (K,O)$.
Für jedes $x \in K$ haben wir also $f(x) \in O$. Da Y ein T_3-Raum ist, existiert nun eine offene Umgebung $V_x \in \sigma$ von $f(x)$ mit $f(x) \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq O$.
Nun existiert wegen der Stetigkeit von f zu jedem $x \in K$ auch eine offene Umgebung $U_x \in \tau$ derart, daß $f(U_x) \subseteq V_x$. Wegen der Lokalkompaktheit von X existieren zudem eine offene Menge U'_x und eine kompakte Menge K_x mit $x \in U'_x \subseteq K_x \subseteq U_x$. Die Familie $\{U'_x \mid x \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von K, so daß es wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung $\{U'_{x_1}, ..., U'_{x_n}\}$ gibt.
Für jedes $i = 1, ..., n$ haben wir $f(K_{x_i}) \subseteq f(U_{x_i}) \subseteq V_{x_i}$, also $f \in (K_{x_i}, V_{x_i})$ und somit auch $f \in \bigcap_{i=1}^n (K_{x_i}, V_{x_i})$.

Sei nun $\mathcal{F}$ ein Filter auf $C(X,Y)$ mit $(K_{x_i}, V_{x_i}) \in \mathcal{F}$, der bezüglich punktweiser Topologie τ_p gegen eine Funktion $g \in C(X,Y)$ konvergiert. Dann folgt aus $(K_{x_i}, V_{x_i}) \in \mathcal{F}$ gerade: $\forall t \in K_{x_i} : \mathcal{F}(t) \subseteq V_{x_i}$, also $V_{x_i} \in \mathcal{F}(t)$; die punktweise Konvergenz sagt uns $\mathcal{F}(t) \xrightarrow{\sigma} g(t)$ und somit haben wir $\forall t \in K_{x_i} : g(t) \in \overline{V_{x_i}}$. Das bedeutet, daß der Abschluß von (K_{x_i}, V_{x_i}) bezüglich punktweiser Topologie Teilmenge von $(K_{x_i}, \overline{V_{x_i}})$ ist:

$$\overline{(K_{x_i}, V_{x_i})}^{\tau_p} \subseteq (K_{x_i}, \overline{V_{x_i}}) \ . \tag{5.9}$$

Nun wissen wir (und sehen unproblematisch auch jederzeit auf's neue ein), daß $\tau_p \subseteq \tau_{co}$ gilt, woraus (siehe z.B. H02.1) $\overline{(K_{x_i}, V_{x_i})}^{\tau_{co}} \subseteq \overline{(K_{x_i}, V_{x_i})}^{\tau_p}$ folgt. Somit folgt aus (5.9) auch

$$(K_{x_i}, V_{x_i}) \subseteq \overline{(K_{x_i}, V_{x_i})}^{\tau_{co}} \subseteq (K_{x_i}, \overline{V_{x_i}}) \ . \tag{5.10}$$

Wir setzen

$$A := \bigcap_{i=1}^n \overline{(K_{x_i}, V_{x_i})}^{\tau_{co}} \ ,$$

was offenbar eine abgeschlossene τ_{co}-Umgebung von f ist.
Da die K_{x_i}, $i = 1, ..., n$ eine Überdeckung von K bilden (denn die $U'_{x_i} \subseteq K_{x_i}$ bilden ja schon eine), gilt $\forall t \in K : \exists i_t \in \{1, ..., n\} : t \in K_{x_{i_t}}$ und somit für jede Funktion $h \in A$ auch $\forall t \in K : h(t) \in \overline{V_{x_{i_t}}} \subseteq O$, d.h. $h(A) \subseteq O$ und so haben wir $A \subseteq (K,O)$. Unser A ist also eine

abgeschlossene Umgebung von f unterhalb der vorgegebenen Subbasisumgebung (K, O). Da dies für alle derartigen Subbasisumgebungen geht, ist $(C(X, Y), \tau_{co})$ laut unsrer Vorbetrachtung T_3. $\square$

Index

[0] René Bartsch. *Allgemeine Topologie.* Berlin: De Gruyter, 2nd ed. edition, 2015.

Literatur

Literaturverzeichnis des Käferbuches

[1] J. Cigler and H.-C. Reichel. *Topologie. Eine Grundvorlesung. 2., überarb. Aufl. Unter Mitarb. von Gabriel Zils.* 1987.

[2] J. Dugundji. *Topology.* 1966.

[3] R. Engelking. *General topology. Rev. and compl. ed.* Berlin: Heldermann Verlag, rev. and compl. ed. edition, 1989.

[4] W. Gähler. *Grundstrukturen der Analysis. I, II.* 1978.

[5] M. Hallett. *Cantorian set theory and limitation of size. (Reprint).* 1986.

[6] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre. Mit 53 Figuren im Text.* 1914.

[7] F. Hausdorff. *Gesammelte Werke. Band II: Grundzüge der Mengenlehre. Herausgegeben von E. Brieskorn, S. D. Chatterji, M. Epple, U. Felgner, H. Herrlich, M. Hušek, V. Kanovei, P. Koepke, G. Preuß, W. Purkert und E. Scholz.* Berlin: Springer, 2002.

[8] H. Herrlich. *Einführung in die Topologie. Unter Mitarb. von H. Bargenda und C. Trompelt.* 1986.

[9] H. Herrlich. *Topologie I. Topologische Räume. Unter Mitarb. von H. Bargenda.* 1986.

[10] H. Herrlich. *Topologie II: Uniforme Räume. Mit zwei Zeichnungen von Volker Kühn.* Berlin (FRG): Heldermann Verlag, 1988.

[11] E. Hewitt. On two problems of Urysohn. *Ann. Math. (2)*, 47:503–509, 1946.

[12] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology. Repr. of the orig., publ. by Addison-Wesley, 1961.* New York: Dover Publications, Inc., repr. of the orig., publ. by addison-wesley, 1961 edition, 1988.

[13] K. Jänich. *Topologie.* Berlin: Springer, 8th ed. edition, 2005.

[14] F. Jones. Concerning normal and completely normal spaces. *Bull. Am. Math. Soc.*, 43:671–677, 1937.

[15] J. E. Joseph, M. H. Kwack, and B. M. Nayar. A characterization of metacompactness in terms of filters. *Missouri J. Math. Sci.*, 14(1):5, 2002.

[16] J. L. Kelley. *General topology. 2nd ed.* 1975.

[17] C. Kuratowski. Sur l'opération A de l'analysis situs. *Fundam. Math.*, 3:182–199, 1922.

[18] B. M. Nayar. A characterization of paracompactness in terms of filterbases. *Missouri J. Math. Sci.*, 15(3):186–188, 2003.

[19] H. Poppe. *Compactness in general function spaces.* 1974.

[20] G. Preuß. Trennung und Zusammenhang. *Monatsh. Math.*, 74:70–87, 1970.

[21] G. Preuss. *Allgemeine Topologie. 2., korrigierte Aufl.* 1975.

[22] G. Preuss. *Theory of topological structures. An approach to categorical topology. Transl. from the author's German manuscript.* Dordrecht (Netherlands) etc.: D. Reidel Publishing Company, transl. from the author's german manuscript edition, 1988.

[23] G. Preuss. *Foundations of topology. An approach to convenient topology.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

[24] W. Rinow. *Lehrbuch der Topologie.* 1975.

[25] W. Rudin. *Analysis. Transl. from the English by Martin Lorenz and Christian Euler. 3rd revised and improved ed.* München: R. Oldenbourg Verlag, 3rd revised and improved ed. edition, 2005.

[26] L. A. Steen and J. A. jun. Seebach. *Counterexamples in topology. Reprint of the 2nd edition published 1978 by Springer.* Mineola, NY: Dover Publications, reprint of the 2nd edition published 1978 by springer edition, 1995.

[27] T. tom Dieck. *Topologie.* Berlin: de Gruyter, 2., völlig neu bearb. und erw. aufl. edition, 2000.

[28] B. von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie.* Berlin: Springer, 3., neu bearbeitete und erweiterte aufl. edition, 2001.

[29] A. Wilansky. *Topology for analysis. Repr. with corr. of the 1970 orig.* 1983.

Ergänzendes und Weiterführendes

[30] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker. *Abstract and concrete categories: the joy of cats.*, volume 2006. Mount Allison University, Department of Mathematics and Computer Science, Sackville, NB, 2006. Available online at `http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf`.

[31] M. F. Barnsley. *Fractals everywhere. Revised with the assistance of Hawley Rising III. Answer key by Hawley Rising III. 2nd ed.* Boston, MA: Academic Press Professional, 2nd ed. edition, 1993.

[32] R. Bartsch. *Compactness properties for some hyperspaces and function spaces.* Aachen: Shaker Verlag; Rostock: Univ. Rostock, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät (Diss.), 2002.

[33] R. Bartsch and H. Poppe. Compactness in function spaces with splitting topologies. *Rostocker Math. Kolloq.*, 66:69–73, 2011.

[34] G. Beer and R. K. Tamaki. On hit-and-miss hyperspace topologies. *Commentat. Math. Univ. Carol.*, 34(4):717–728, 1993.

[35] H. Bentley, H. Herrlich, and E. Lowen-Colebunders. Convergence. *J. Pure Appl. Algebra*, 68(1-2):27–45, 1990.

[36] P. Blanchard and E. Brüning. *Variational methods in mathematical physics. A unified approach. Transl. from the German by Gillian M. Hayes.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992.

[37] W. Comfort and S. Negrepontis. *The theory of ultrafilters.* 1974.

[38] G. Dal Maso. *An introduction to* Γ*-convergence.* Basel: Birkhäuser, 1993.

[39] H. Fennel. *Nietzsche, Hilbert, Duchamp: die ästhetische Moderne im Wechselspiel von Philosophie, Mathematik und Kunst ; ein metaphorisches Spiel: von selbstbezüglicher Theorie und künstlerischer Praxis ; mit 32 Schach-Tableaus.* Ed. Ludus, 2013.

[40] Z. Frolík. Generalizations of compact and Lindelöf spaces. *Czech. Math. J.*, 9:172–217, 1959.

[41] M. Hušek and J. van Mill, editors. *Recent progress in general topology. Papers from the Prague Toposym 1991, held in Prague, Czechoslovakia, Aug. 19-23, 1991.* Amsterdam: North-Holland, 1992.

[42] M. Hušek and J. van Mill, editors. *Recent progress in general topology II. Based on the Prague topological symposium, Prague, Czech Republic, August 19–25, 2001.* Amsterdam: Elsevier, 2002.

[43] J. Isbell. *Uniform spaces.* 1964.

[44] E. Klein and A. C. Thompson. *Theory of correspondences. Including applications to mathematical economics.* 1984.

[45] T. Mizokami. The embedding of a mapping space with compact open topology. *Topology Appl.*, 82(1-3):355–358, 1998.

[46] M. Murdeshwar and S. Naimpally. *Quasi-uniform topological spaces.* 1966.

[47] S. Naimpally. Hyperspaces and function spaces. *Quest. Answers Gen. Topology*, 9(1):33–60, 1991.

[48] S. Naimpally. A brief survey of topologies on function spaces. In *Recent progress in function spaces*, pages 259–283. Rome: Aracne, 1998.

[49] H. Poppe. Einige Bemerkungen über den Raum der abgeschlossenen Mengen. *Fundam. Math.*, 59:159–169, 1966.

[50] H. Poppe. On locally defined topological notions. *Quest. Answers Gen. Topology*, 13(1):39–53, 1995.

[51] G. Preuß. Semiuniform convergence spaces. *Math. Jap.*, 41(3):465–491, 1995.

[52] M. Struwe. *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. 3rd ed.* Berlin: Springer, 3rd ed. edition, 2000.

[53] S. Willard. *General topology. Reprint of the 1970 original.* Mineola, NY: Dover Publications, reprint of the 1970 original edition, 2004.

Empfohlene Internetseiten

[54] community. *Matroids Matheplanet.* Betreiber: Martin Wohlgemuth.
`http://www.matheplanet.com/`
Ausgezeichnet organisierte Community, in der Fragen zur Mathematik, Physik und Informatik (vom Schul- bis zum Universitätsniveau) diskutiert werden. Insbesondere gibt es hier ein eigenes Topologie-Forum!

[55] determinacy et al. *verstecktes Auswahlaxiom.* Matroids Matheplanet.
`http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=22376`.

[56] European Mathematical Society, FIZ Karlsruhe, and Heidelberg Academy of Sciences and Humanities, editors. *Zentralblatt Mathematik.* FIZ Karlsruhe.
`https://zbmath.org/` *Sehr* nützlich!

[57] gockel. *Der Satz von Sierpinski.* Matroids Matheplanet.
`http://matheplanet.com/default3.html?article=989`.

[58] huepfer. *Das Sierpinski-Dreieck und seine Verwandten.* Matroids Matheplanet.
`http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1130`.

[59] Martin_Infinite. *Die Qual der Vektorauswahl.* Matroids Matheplanet.
`http://matheplanet.com/default3.html?article=712`.

[60] Martin_Infinite. *von-Koch'sche Flockenkurve.* Matroids Matheplanet.
`http://matheplanet.com/default3.html?article=381`.

[61] Martin_Infinite and marvinius. *Multiple Choice und Antiketten.* Matroids Matheplanet.
`http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/viewtopic.php?topic=23826`.

[62] r.b. *Errata und Ergänzungen zu diesem Buch.*
`http://topologie.marvinius.net`.

[63] D. Shakhmatov and S. Watson, editors. *Topology Atlas.* York University, Toronto.
`http://at.yorku.ca/topology/`
Englischsprachige Topologie-Plattform mit Konferenzterminen, Artikeln und einem Frage-Antwort-Bereich.