René Bartsch

Allgemeine Topologie I - Errata

2017-04-11-21:13

(1) S. 7 Lemma 1.1.6: Es muß heißen „Seien X, Y nichtleere Mengen und ...“.
In der dritten Zeile des Beweises muß es heißen
„$y_0 \notin f(X)$. Sei ferner $y' \in f(X)$ beliebig ... “.
(2016-03-06-22:01)

(2) S. 10, drittletzter Absatz: es sollte heißen
„Eine Menge $\mathfrak{Z}$ von nichtleeren Teilmengen einer ...“.
(2016-03-06-22:01)

(3) S. 21: 3. Zeile von unten: „... Axiomatik widersprüchlich ...“

(4) S. 29, Lemma 1.2.12.: Die leere Menge legt sich mal wieder quer. Damit im Beweis nicht $S_0 = \emptyset$ störend auftreten kann, sollte entweder

(a) kurz & bündig $\emptyset \in \Sigma$ gefordert werden, oder

(b) das Lemma bei der Gelegenheit gleich etwas allgemeiner formuliert werden:
„Sei $(X, \leq)$ eine nichtleere wohlgeordnete Menge und $\Sigma \subseteq \mathcal{S}(X)$ eine nichtleere Familie von Schnitten, deren (wegen wegen 1.2.11 existierendes) minimales Element der Schnitt S_{min} sei, und für die

(1) Jede Vereinigung von Elementen von Σ ist wiederum Element von Σ.

(2) Aus $X(a) \in \Sigma$ folgt stets $X(a) \cup \{a\} \in \Sigma$.

gelten. Dann ist $\Sigma = \{S \in \mathcal{S}(X) \mid S_{min} \subseteq S\}$, speziell also $X \in \Sigma$. “.

Natürlich muß dann auch der Beweis ein bißchen angepaßt werden.
(2016-04-07-21:36)

(5) S. 51: 4. Zeile im **Beweis von Lemma 1.4.10**: „Gelte also $\forall \psi \in \mathfrak{F}_0(\varphi) : \exists E_\psi \in \mathfrak{E} : E_\psi \in \psi$ ...“

(6) S. 60: Lösungsvorschlag 2, Definition von g (Semikolon verrutscht):

$$g : X \to Y : g(x) := \begin{cases} f^{-1}(x) & ; \quad \text{falls } x \in f(X) \\ y_0 & ; \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(7) S. 60, viertletzte Zeile im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
„Aus $h(g^{-1}(y_1)) = h(g^{-1}(y_2))$ folgt ...“.

(8) S. 71: vorletzte Zeile im Beweis von 2.1.10 „... eine ε-Umgebung ...“

(9) S.73: Beweis von 2.1.14, Ende der vierten Zeile in Abschnitt (2):
„... also $\mathcal{H}_{E,\varepsilon} \cap (I\!R^{\boldsymbol{R}} \setminus \mathcal{M}) \neq \emptyset$ gilt.“

(10) S. 86: Beweis der Richtung „(2) $\Rightarrow$ (1)“ von Satz 2.2.19: „... und $O_2 := \bigcup_{B \in \mathfrak{A}_2} B$ mit ...“

(11) S. 88: Proposition 2.2.23 (1): „... ist genau dann ei**n** ...“

(12) S. 89: 2. Zeile des Beweises von 2.2.27: „... hingegen $\forall \emptyset \neq O \in \mathfrak{B} : O \cap D \neq \emptyset$, ...“

(13) S. 89: Beweis von Lemma 2.2.26, letzte Zeile: „... aus $\forall \emptyset \neq O \in \tau : D \cap O \neq \emptyset$ sogleich ...“. Zudem sollte statt 2.2.13 beidemal 2.2.9 zitiert werden.

Beweis von Proposition 2.2.28, letzte Zeile: Es sollte 2.2.26 (oder auch wieder 2.2.9) zitiert werden, keineswegs 2.2.13.

(14) S.93: Beweis von 2.2.36, (3)$\Rightarrow$(4): Hier sollte zweimal 2.2.11 (2) statt 2.2.13(3) zitiert werden.
(4)$\Rightarrow$(5): Hier sollte 2.2.9 statt 2.2.13(1) zitiert werden.

(15) S. 96, Absatzbeginn nach dem letzten Stichpunkt der Beispiele, die auf S. 95 begannen: Die Worte „Topologisch relevante“ sollen nicht kursiv gesetzt werden, sondern die sollen weg, weil sie den Sinn des Satzes entstellen.
(2016-03-17-00:17, rb)

(16) S. 101: Lösungsvorschlag 1, 1. Formelzeile:

$$\forall y \in U(x,\delta) : \forall a \in A : d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \wedge d(x,a) \leq d(y,x) + d(y,a)$$

(17) S.110: Proposition 3.1.9: Hier wurde am Anfang die Indexmenge J und bei (2) die Indexmenge I verwendet. Das sollte aber beidemale dieselbe sein.

(18) S. 111: In Lemma 3.1.13 (2) muß es heißen „... das einzige Paar aus surjektiver verträglicher Abbildung ...“.

(19) S. 117, 4. Zeile: „... diesmal freilich mit der Topologie $\tau := \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$.“

(20) S.125: Beweis 4.2.2, (2)$\Rightarrow$(3): Es sollte 2.2.9 anstatt 2.2.13(1) zitiert werden.
(4)$\Rightarrow$(1): Es sollte 2.2.9 anstatt 2.2.11 zitiert werden.

(21) S. 127: Proposition 4.2.6 (3): „... ein T_2-Raum ...“

(22) S. 127: Beweis von 4.2.6(3), vorletzte Zeile:
„... weil $O_x \cap H$, $O_y \cap H$ Elemente von ...“

(23) S. 150, letzte Zeile von Lemma 5.1.3(4): es muß natürlich „Teilfamilie $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{A}$“ heißen statt „Teilfamilie $A_1, ..., A_n \subseteq \mathfrak{A}$“.
(2017-04-11-20:50)

(24) S. 142, Beweis von Lemma 4.4.15, dritte Zeile von unten: „$... \subseteq D \cap (U(H_1) \setminus U(H_2))$“

(25) S. 145: vorletzte Zeile im Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2: „... zugehörige Familie $\{U_n \in \tau \mid n \in \mathbb{N}\}$ offener ...“

(26) S. 161: Zeile 2 der ersten Fußnote: „... daß κ unendlich viele ...“

(27) S. 162 Beweis von Lemma 5.2.4: Hier sollte wieder 2.2.9 anstatt 2.2.13(1) zitiert werden, da für die x aus $G \cap \overline{A}$ ja $x \in \overline{A}$ gilt und G offene Umgebung von x ist. Im weiteren Verlauf des Lemmas auf S. 163 sollte noch zwei weitere Male 2.2.9 anstatt 2.2.13(1) zitiert werden.

(28) S. 163, 1. Zeile von Satz 5.2.6: Die leere Menge mal wieder ... es muß heißen „Für jedes $i \in I$ sei $\emptyset \neq R_i \subseteq X_i$ gegeben.“.

(29) S. 172: 3. Zeile im Beweis von Satz 5.3.8: „$\forall i \in I : O_i \in \tau_i$ und für eine endliche Teilmenge I_2 von I zudem $\forall\, i \in I \setminus I_2 : O_i = X_i$ eine offene ...“

(30) S. 177: Lemma 5.3.19 ist in der angegebenen Form falsch.

Richtig muß es lauten:

„**Lemma 5.3.19** Ist $\mathcal{E}$ eine innertopologische Eigenschaft und (X, τ) ein beliebiger topologischer Raum, so gilt $\mathcal{E}(X, \tau) \subseteq \mathcal{E}(X, \tau^{\mathcal{E}})$.
Beweis: Weil $\mathcal{E}$ innertopologisch ist, haben wir $A \in \mathcal{E}(X, \tau) \Rightarrow A \in \mathcal{E}(A, \tau_{|A})$, also $A \in \mathcal{E}(A, (\tau^{\mathcal{E}})_{|A})$ wegen $\tau_{|A} = (\tau^{\mathcal{E}})_{|A}$ und folglich $A \in \mathcal{E}(X, \tau^{\mathcal{E}})$. ■

D.h. innertopologische $\mathcal{E}$ sind im zweiten Argument τ monoton wachsend. Daß die in der alten Fassung behauptete Gleichheit $\mathcal{E}(X, \tau) = \mathcal{E}(X, \tau^{\mathcal{E}})$ i.a. *nicht* gilt, kann man sich an einem simplen Beispiel überlegen:

$\mathcal{E}$ sei die Eigenschaft, „als Teilraum diskret“ zu sein. Die ist innertopologisch im Sinne der Definition. Nun sei X irgendeine mehrpunktige Menge und τ die indiskrete Topologie darauf. Dann sind die höchstens einpunktigen Teilmengen schon alle Teilmengen mit Eigenschaft $\mathcal{E}$ in X. Freilich ist der Schnitt *jeder* Teilmenge von X mit einer einpunktigen Teilmenge offen in der einpunktigen. Somit ist die $\mathcal{E}$-Erweiterung $\tau^{\mathcal{E}}$ die diskrete Topologie auf X - und plötzlich wimmelt es von Teilmengen mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$.

Die Gleichheit $\mathcal{E}(X, \tau) = \mathcal{E}(X, \tau^{\mathcal{E}})$ gilt aber offenbar z.B. dann, wenn $\mathcal{E}$ im zweiten Argument monoton fallend ist, d.h. falls wir für alle Mengen X und Topologien $\tau \subseteq \sigma$ auf X stets $\mathcal{E}(X, \tau) \supseteq \mathcal{E}(X, \sigma)$ haben, wie das etwa bei Kompaktheit der Fall ist. Gleichwohl folgt aus $\mathcal{E}(X, \tau) = \mathcal{E}(X, \tau^{\mathcal{E}})$ noch nicht einmal, daß $\mathcal{E}$ innertopologisch ist: ...“

(31) S. 180, drittletzte Zeile: „ent-technisiert“ sollte natürlich ohne Bindestrich geschrieben werden.

(32) S. 181, Beispiel 5.3.25:
„Sei $X := I\!\!R$ und τ die von der Basis $\tau_e \cup \mathfrak{P}(I\!\!R \setminus \{0\})$ erzeugte Topologie, wobei ...“

(33) S. 183, Beweis von Lemma 5.3.27: In Zeile 3 muß es $\mathcal{F}(\varphi) \supseteq \overset{\bullet}{f(x)} \cap \sigma$ heißen.

(34) S. 188: 2. Satz nach Definition 5.4.1: „... zu einem dichten Unterraum davon ist.“

(35) S. 192: Lemma 5.4.6.(3), letzte Zeile: „... Spurtopologie auf $f(X) \subseteq \prod_{i \in I}(Y_i, \sigma_i)$“

(36) S. 192: 3. Zeile im Beweis von Lemma 5.4.6(3): „... eine offene Umgebung ...“

(37) S. 193, 4. Zeile: „... wenn $\omega : X \times \mathfrak{C}(X) \to [0,1]$ die übliche ...“

(38) S. 193: „... gibt es zu je zwei verschiedenen Elementen $x_1, x_2 \in X$ ...“

(39) S. 196, Beweis von Satz 5.4.8 (2): „Wegen der Injektivität ...“
Einerseits müßte es heißen „wegen der Surjektivität von e_X als Abbildung nach $e_X(X)$ bzw. e' als Abbildung von X nach $e'(X)$ ...“, andererseits geht es kürzer:

„Einsetzen von (5.4) in (5.5) liefert $e' = F \circ G \circ e'$ und Einsetzen von (5.5) in (5.4) liefert $e_X = G \circ F \circ e_X$.

Freilich ist sowohl $G \circ F$ als auch $F \circ G$ als Komposition stetiger Abbildungen wiederum stetig und darum stetige Fortsetzung von e_X zu einer stetigen Abbildung von $\beta(X)$ nach $\beta(X)$ (bzw. Fortsetzung von e' zu einer stetigen Abbildung von X' nach X').

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "e_X"'] \arrow[dr, "e'"] & \\
\beta(X) \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[loop below, "\mathbb{1}_{\beta(X)}"] & & X' \arrow[ll, shift left, "G"] \arrow[loop below, "\mathbb{1}_{X'}"]
\end{tikzcd}$$

Weil aber auch $\mathbb{1}_{\beta(X)}$ bzw. $\mathbb{1}_{X'}$ solche stetigen Fortsetzungen sind und es nach Voraussetzung bzw. (1) davon jeweils nur eine geben kann, erhalten wir $G \circ F = \mathbb{1}_{\beta(X)}$ und $F \circ G = \mathbb{1}_{X'}$. Wegen der Stetigkeit von F *und* G, sind sie somit beide Homöomorphismen zwischen $\beta(X)$ und X'.“

(40) S. 196: letzte Zeile im Absatz unter Aufgabe 14: „... Funktion $f : (0,1] \to [-1,1] : f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ keine ...“

(41) S. 216: 3. Zeile im 3. Absatz von unten: „Abschlußfilter $\overline{[\alpha]}$ (siehe 2.2.14) des von ...“

(42) S. 222: Beweis von Lemma 5.5.24: „Sei (X, τ) also voll T_4 ...“

(43) S. 226: Satz nach Definition 5.5.34: „Durch jede Überdeckungs-Normalfolge ...“

(44) S. 245: Semikolon zuviel in Zeile 11: „... Für ein beliebiges $j \in \{i \in I \mid x_i \neq a_i\}$ ...“

(45) S. 249: 1. Satz nach Definition 6.2.11: „... Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen mit ...“

(46) S. 253, letzte Zeile / S.254 erste Zeile:
„Bei lokal wegzusammenhängenden Räumen ist das laut Lemma 6.2.9 zwar der Fall, ...“
Das ist auch da natürlich **nicht** der Fall, wie das nachfolgende Beispiel ebenso wie für lokalen Zusammenhang lehrt. Keine Ahnung, wie ich seinerzeit auf diese Bemerkung verfallen bin - zumal Lemma 6.2.9 gar nichts über lokale Eigenschaften aussagt.

(47) S. 255: In der viertletzten Zeile des Beweises von Satz 6.3.8 muß statt L jeweils F stehen.

(48) S. 259: in der 6. Zeile von unten muß aus „Wir setzen $O := O_{y_1} \cap \cdots \cap O_{y_n})$.“ natürlich die schließende Klammer weg.

Ich danke herzlich den freundlichen Hinweisgebern

- *Karsten Evers* von der Uni Rostock für (30),
- *Philip Saltenberger* von der Leibniz Universität Hannover für (5),
- *Alexander Birx* von der TU Darmstadt für (13, 8, 9, 14, 17, 20, 24, 27, 32, 31, 33, 46),
- *Klaus Kreß* von der TU Darmstadt für (10, 12, 7, 19, 22, 48),
- *Fabian Kertels* von der TU Darmstadt für (18),
- *Anne Nicola Tabbert* von der TU Darmstadt für (37),
- *Tobias Land* für (1, 2),
- *Felix Jordan* von der TU Darmstadt für (4),
- *Jonas Tibke* von der TU Darmstadt für (23, 28).

René Bartsch
Darmstadt, 11.04.2017